UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
Licenciatura em Matemática
UNIOESTE – Campus Cascavel

Bárbara Crippa Bianchetto
Eliza Bruna Dalla Corte Andreola
Erika Diana Alves de Oliveira
Jheniffer Rafaelly Vieira da Silva

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIAS E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO II

PROMAT

CASCAVEL – PR

2023

Bárbara Crippa Bianchetto
Eliza Bruna Dalla Corte Andreolla
Erika Diana Alves de Oliveira
Jheniffer Rafaelly Vieira da Silva

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIAS E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO II

PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina para aprovação.

Orientador: Prof. Dr. Amarildo Vicente

CASCAVEL

2023

Lista de Figuras

Sumário

1. Introdução

Esse trabalho é um relatório do projeto PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática é executado na UNIOESTE-Universidade Estadual do Oeste do Paraná no Campus de cascavel, com aulas de matemática ministradas aos sábados. Os planos de aula, relatórios de cada encontro, descrições da metodologia utilizada em cada atividade de ensino e vivências durante o período de desenvolvimento do projeto estão presentes nele.

O projeto conta com 20 encontros de quatro horas aula, separados em dois módulos. Nos primeiros 10 encontros as aulas são ministradas pelos alunos do curso de Licenciatura em Matemática que estão cursando a disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado I. Após estes 10 encontros, é feito um novo período de inscrição, os alunos se matriculam novamente é feita a divulgação para que entrem novos alunos. E são trabalhados conteúdos em mais 10 encontros, divididos em 4 temas centrais. Trabalhamos Análise Combinatória, Geometria Analítica, Trigonometria e encerramos com Tratamento de Informação.

Os planos de aula e a metodologia foram pensados como uma revisão e aprofundamento dos conteúdos do ensino médio, com o intuito de ajudar na preparação dos alunos para o vestibular da Unioeste e para o Enem.

A elaboração das atividades a serem realizadas durante as aulas, planos de aulas, lista de exercícios e atividades lúdicas, foram feitas durante as aulas da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado I com auxílio de nossos professores.

Em nossas aulas, abordamos as tendências de Resolução de Problemas e de Investigação Matemática, a fim de fornecer aos alunos conceitos, definições e sugestões que os ajudem a compreender e apropriar-se dos conteúdos de forma mais eficaz. Além disso, buscamos estabelecer conexões entre a Matemática e as vivências do dia a dia dos estudantes.

Para participar do projeto há alguns critérios, sendo eles: as primeiras vagas são destinadas para alunos do terceiro ano do ensino médio, em seguida para alunos do segundo ano do ensino médio, e em sequência para alunos matriculados no curso de matemática da própria instituição. Um adendo é de que os alunos ganham horas curriculares. E por fim, caso as vagas não sejam preenchidas, as inscrições são abertas a comunidade. Para ganhar certificação o aluno precisa ter pelo menos 75% de frequência.

O projeto proporciona benefícios significativos aos acadêmicos estagiários por meio das diversas experiências vivenciadas, incluindo a construção e execução de planos de aula, gestão e conduta em sala de aula, planejamento de ensino, trabalho em equipe e organização de situações didáticas. Essas experiências contribuem para o nosso desenvolvimento como futuros professores, melhorando nosso desempenho e preparando-nos para os desafios da carreira docente.

2. O que é o PROMAT

O Promat – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática, é um programa institucional oferecido pelos docentes do Curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste (Universidade Estadual do Oeste do Paraná) - Campus Cascavel. Seu objetivo principal é atender alunos do ensino médio que buscam acesso à rede pública estadual de ensino superior. Além disso, o plano se propõe a oferecer o conteúdo educacional básico exigido para o vestibular e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) por meio do “Curso Preparatório de Matemática”. O programa é dividido em dois semestres.

No primeiro semestre, os alunos do terceiro ano de Matemática, através da disciplina Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado I organizam e lecionam sob a orientação de professores, o conteúdo abordado neste período é relativamente básico e introdutório. No segundo semestre, os alunos do quarto ano de Matemática na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado II são responsáveis pela preparação e condução das aulas sob a orientação dos professores, o conteúdo deste período é um pouco mais aprofundado.

As aulas são ministradas nos campi universitários aos sábados de manhã, e cada aula dura 3 horas e 40 minutos, incluindo um intervalo de 20 minutos. A cada semestre há um novo processo de admissão e seleção, e o programa é totalmente gratuito. Ao final do programa, os alunos participantes receberão um certificado de participação.

O principal objetivo do projeto é superar as barreiras que os alunos podem encontrar em sua experiência escolar. Para tanto, o curso prepara diversos materiais de referência, entre livros didáticos, materiais operacionais e jogos elaborados pelos próprios bolsistas, sempre sob a orientação e supervisão do instrutor. A importância do programa está em fornecer oportunidades educacionais significativas e ajudar os alunos a alcançar seus objetivos acadêmicos

Abaixo a tabela 1 exemplificará todos os conteúdos abordados

Tabela 1: Conteúdos dos encontros do PROMAT

Módulo	**Encontro**	**Data**	**Conteúdos**
Módulo 1 Técnicas de Contagem	1	11/03	Princípio Fundamental da Contagem e Permutação
	2	18/03	Arranjo, Combinação e Probabilidade
Módulo 2 Geometria Analítica	3	25/03	GA: Coordenadas cartesianas, distâncias entre pontos
	4	01/04	Equação geral da reta e Posições das retas no plano
	5	15/04	Equação geral e reduzida da circunferência
Módulo 3 Trigonometria	6	29/04	Seno, Cosseno, Tangente, arcos e radianos
	7	06/05	Trigonometria no triângulo retângulo e arcos notáveis
	8	13/05	Relações trigonométricas e Relações fundamentais
	9	20/05	Funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente)

Módulo 4 Tratamento da informação	10	27/05	Estatística, gráficos e tabelas

Fonte 1: Autores

3. Opção Teórica e Metodológica

Utilizamos a Metodologia de Resolução de Problemas, aliada à metodologia ativa T*eam-based Learning* (TBL), para desenvolver especificamente os conteúdos. Nosso objetivo era explorar, junto aos alunos, a compreensão de conceitos fundamentais para a resolução de exercícios propostos, assim como as abordagens utilizadas pelo ENEM e outros vestibulares em determinadas questões. Com o TBL objetivamos aulas baseadas em atividades estruturadas que promovessem o trabalho em equipe, a resolução de problemas e a aplicação prática do conhecimento.

Para enriquecer as aulas, aproveitamos as tecnologias disponíveis, como o *GeoGebra,* que nos proporcionou ferramentas práticas, como gráficos e muito mais. Incorporamos o uso de jogos sempre que possível, pois reconhecemos que as vantagens em os utilizar são enriquecedoras para aulas de matemática.

Destacamos algumas vantagens como por exemplo: o engajamento e motivação, pois os jogos despertam o interesse dos alunos, tornando as aulas mais envolventes e divertidas. O aprendizado ativo proporcionando uma experiência de aprendizado ativo, no qual os alunos são desafiados a resolver problemas e tomar decisões dentro do contexto do jogo. A aplicação prática dos conceitos, oferecendo oportunidades para os alunos aplicarem os conceitos matemáticos de forma prática e contextualizada. Eles podem experimentar na prática as consequências das suas escolhas e estratégias, desenvolvendo habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico. E a colaboração e interação social, na qual projetamos os jogos para serem jogados em grupo, promovendo a colaboração e a interação entre os alunos. Eles precisam discutir estratégias, trocar ideias e trabalhar em equipe para alcançar os objetivos do jogo. Isso incentiva a comunicação, o trabalho em equipe e o desenvolvimento de habilidades sociais.

4. Encontro 1

4.1. Plano de Aula Encontro 1

Plano de Aula 1

11/03/2023

Conteúdo

Princípio fundamental da contagem; fatorial; permutação.

Público-alvo

Alunos inscritos no projeto de ensino Promat.

Objetivo geral

Compreender o princípio fundamental da contagem.

Objetivos específicos

- Aplicar técnicas para resolver problemas que envolvam o princípio fundamental da contagem;
- Compreender o conceito de permutação simples e com repetição;
- Resolver problemas evolvendo o uso do conteúdo de permutação simples e com repetição.

Tempo de execução

3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos

Lâminas, quadro, giz, material impresso, projetor,

Encaminhamento metodológico

Iniciaremos o encontro recepcionando os alunos, e entregando um crachá no qual eles deverão escrever o nome. Logo após a recepção, pediremos ajuda para organizar as cadeiras em círculo e iniciar a dinâmica de apresentação:

Dinâmica de apresentação: com os alunos organizados em círculo vamos iniciar as apresentações. Quem se sentir confortável deve se apresentar com o nome e alguma informação sobre si, pode ser um filme favorito, um livro, uma característica, alguma atividade que goste ou o que achar importante de compartilhar com o grupo.

Depois da primeira rodada iniciaremos uma nova, porém dessa vez o aluno deve tentar se lembrar do que o colega do lado disse na rodada anterior, com essa atividade queremos chamar a atenção sobre a importância de se ouvir o que o outro fala também.

(**30 min)**

Atrás do crachá terá um número que servirá para dividir os grupos. Logo após solicitaremos que os alunos se organizem em grupos, de acordo com a numeração que receberam no início da aula. Então vamos explicar que a sala será sempre organizada em grupos com o objetivo de melhor atendê-los, especialmente, durante as atividades.

Em seguida, iniciaremos a projeção dos *slides* e solicitaremos que os alunos resolvam o problema abaixo:

Problema 1: Adaptado do livro de Dante (2014, p.247) Numa lanchonete há 4 tipos de sanduiches, 3 tipos de refrigerante e dois tipos de sobremesa.

Figura 1 - Problema 1

Sanduiches	Refrigerantes	Sobremesa
X-tudo	Laranja	Sorvete
X-bacon	Morango	Cupcake
X- salada	Limão	------------

a) De quantas maneiras diferentes podemos comer um sanduiche com um refrigerante sem a sobremesa?

b) De quantas maneiras diferentes podemos comer um lanche completo, ou seja, um sanduiche, um refrigerante e uma sobremesa?

(15 min)

Na sequência, apresentaremos uma definição formal do Princípio Fundamental da Contagem.

Princípio Fundamental da Contagem

Se um evento é composto por m etapas diferentes sucessivas e independentes de tal maneira que a etapa 1 tenha n_1 possibilidades, que a etapa 2 tenha n_2 possibilidades, ..., que tenha nm possibilidades, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m$. Esse é o Princípio Fundamental de Contagem.

(5 min)

Disponibilizaremos uma lista de exercícios impressa, e solicitaremos que os alunos resolvam alguns. Resolveremos no quadro, respondendo dúvidas caso houver. **(10 min)**

Em seguida abordaremos o conteúdo fatorial, apresentando definições e resolvendo exercícios.

Definição: seja n um número natural, com $n \geq 2$. Define-se o fatorial de n, que indicamos por $n!$, como o produto dos números naturais consecutivos:

$$n, (n-1), (n-2), \ldots, 1$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

(5 min)

Os exercícios serão entregues em uma folha impressa. Resolveremos no quadro junto com os alunos, para explicar o conteúdo. **(45 min)**

Intervalo de 20 minutos.

Ao retornarmos do intervalo, colocaremos duas cadeiras na frente do quadro e solicitaremos que dois alunos se sentem nelas. Então questionaremos de quantos modos distintos os dois alunos podem se sentarem nas cadeiras. Em seguida realizaremos as trocas de lugares dos alunos, sendo anotado no quadro cada combinação possível.

Neste caso, temos duas possibilidades. Dando continuidade acrescentaremos uma cadeira e solicitaremos que um aluno, diferente dos outros dois escolhidos inicialmente, sente na cadeira acrescentada.

Realizaremos o mesmo processo do que no caso que tínhamos duas cadeiras. Obtendo, neste caso, seis permutações.

Em seguida solicitaremos que os alunos pensem no seguinte caso:

Problema 2: E se tivéssemos quatro cadeiras, de quantos modos distintos podemos dispor quatro alunos?

(5-10 min)

Após os minutos separados para a resolução do problema anterior, questionaremos os alunos de que maneira eles solucionaram e faremos uma conferência da solução no quadro. Então, apresentaremos uma definição formal para o conteúdo de permutação:

Permutação simples

Permutar significa trocar de posição, e foi exatamente isso que fizemos no problema das cadeiras. Que neste caso, estamos realizando uma permutação simples de 4 elementos. A palavra simples significa que não haverá repetição de elementos. Definimos permutação simples de n elementos por:

$$P_n = n!$$

(3-5 min)

Solicitaremos então que resolvam o seguinte problema:

Problema 3: Quantos são os anagramas (diferentes disposições das letras de uma palavra) da palavra A N E L?

(5 min)

Após faremos a correção juntamente com os alunos. Definiremos em seguida permutação com repetição, apresentando um exemplo.

Vamos determinar quantas permutações existem para a palavra ASA. Para facilitar vamos colorir as letras. Vejamos os anagramas da palavra ASA.

ASA AAS ASA AAS SAA SAA

O número de permutações simples com 3 elementos é dado por:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

No entanto note que o anagrama AAS = AAS, SAA = SAA e ASA = ASA são iguais. Ou seja, algumas permutações se repetem e não podemos contá-las duas vezes. Para isso devemos dividir o valor de P_3 (pois a palavra possui três letras), por P_2 (pois a letra A se repete duas vezes).

$$P_3 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Dessa forma, o número de permutações para as letras da palavra ASA é igual a 3.

De maneira geral:

O número de permutações de n elementos dos quais α é de um tipo, β é de outro e γ é de outro, é dado por:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma!}$$

Nos quais α, β, γ representam o número de vezes que certo elemento repete.

(10-15 min)

O tempo restante do encontro será destinado a resolução e correção da lista de exercícios.

Avaliação

A avaliação ocorrera de forma contínua, através da observação do desenvolvimento dos alunos com os problemas propostos.

Bibliografia

BALESTRI, R. **Matemática:** interação e tecnologia. Vol. 2. 2. Ed. São Paulo: Leya, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática contexto & aplicações**: ensino médio. 3. ed.São Paulo: Ática, 2016.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar:** combinatória, probabilidade. Vol. 5. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual do Paraná** (CREP): Matemática. Curitiba: SEED, 2019.

ASTH, Rafael. **Princípio fundamental da contagem**. Toda Matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/principio-fundamental-da-contagem/ Acesso em: 08 mar. 2023.

Exercícios sobre permutação simples. Brasil Escola. https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-permutacao-simples.htm#questao-12 Acesso em: 08 mar. 2023.

Exercícios Princípio Fundamental da Contagem. Só Exercícios. Disponível em: https://soexercicios.com.br/plataforma/questoes-de-vestibular/ENEM/7908/-principio-fundamental-da-contagem-/1 Acesso em: 08 mar. 2023.

Anexo 1

1° Encontro

Conteúdo: Princípio Fundamental da Contagem **Data:** 11/03/2023

1. Ana estava se organizando para viajar e colocou na mala 3 calças, 4 blusas e 2 sapatos. Quantas combinações Ana pode formar com uma calça, uma blusa e um sapato?

a)12combinações

b)32combinações

c)24combinações

d)16 combinações

c) 24 combinações.

Observe que para cada uma das 4 blusas, Ana tem 3 opções de calça e duas opções de sapato.

Portanto, 4 x 3 x 2 = 24 possibilidades.

Sendo assim, Ana pode formar 24 combinações com as peças da mala. Confira os resultados com a árvore de possibilidades.

2. Um professor elaborou uma prova com 5 questões e os alunos deveriam respondê-la assinalando verdadeiro (V) ou falso (F) para cada uma das questões. De quantas maneiras distintas o teste poderia ser respondido?

a)25

b)40

c)24

d)32

d) 32 respostas possíveis.

Existem duas opções distintas de resposta numa sequência de cinco questões.

Utilizando o princípio fundamental da contagem, temos:

2.2.2.2.2 = 32 respostas possíveis para o teste.

3. De quantas maneiras um número com 3 algarismos distintos pode ser formado utilizando 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

a)200

b)150

c)250

d)100

d) 100.

O número formado deve conter 3 algarismos para preencher a posição de centena, dezena e unidade.

centena dezena unidade

Na primeira posição não podemos colocar o número 0, pois seria o mesmo que ter um número com 2 algarismos. Por isso, para a centena temos 5 opções de algarismos (1, 2, 3, 4, 5).

Já para a segunda posição não podemos repetir o número que foi usado para centena, mas podemos utilizar o zero, portanto na dezena temos também 5 opções de algarismos.

Como nos foi dado 6 algarismos (0, 1, 2, 3, 4 e 5) e dois que foram utilizados anteriormente não podem ser repetidos, então para a unidade temos 4 opções de algarismos.

Sendo assim, 5 x 5 x 4 = 100. Temos 100 maneiras de escrever um número com 3 algarismos distintos utilizando 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

4. Heitor está brincando com os seus carrinhos, os enfileirando de maneiras distintas. Sabendo que ele está brincando com 4 carrinhos, de quantas maneiras distintas ele pode enfileirá-los?

a) 4

b) 8

c) 16

d) 24

e) 120

Alternativa D

Temos uma permutação simples de 4 elementos:

$$P_4=4!$$

$$P_4=4\cdot3\cdot2\cdot1$$

$P_4=24$

Logo, há 24 maneiras distintas de enfileirar os carrinhos.

5. Durante a expedição de uma empresa de peças automotivas, um entregador fará a entrega de 5 encomendas. Para uma delas, o cliente pediu urgência, e a empresa resolveu atender a esse pedido. Já as demais serão feitas todas em pontos diferentes da cidade. Logo, o entregador tem liberdade para fazer a rota de entrega dos demais pedidos. Diante disso, de quantas maneiras distintas essa entrega pode ser feita?

a) 16

b) 24

c) 25

d) 120

e) 720

Alternativa B

O entregador tomará a decisão das outras 4 entregas, já que a primeira será a do cliente que pediu urgência.

Nesse caso, basta calcular a permutação de 4 elementos:

$$P_4=4!$$

$$P_4=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

$$P_4=24$$

6. Quantos números de algarismos distintos são possíveis formar com os algarismos ímpares 1, 3, 5, 7, 9?

a) 6

b) 16

c) 24

d) 120

e) 720

Alternativa D

Como há 5 algarismos, basta calcularmos a permutação de 5 elementos:

P5=5!

P5=5·4·3·2·1

P5=120

7. Simplifique as frações:

a) $\frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 6.5.4 = 120$

b) $\frac{4!}{6!} = \frac{4!}{6.5.4!} = \frac{1}{6.5} = \frac{1}{30}$

c) $\frac{5!\,.8!}{4!\,.7!} = \frac{5.4!.8.7!}{4!.7!} = 5.8 = 40$

d) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n.(n-1)!}{(n-1)!} = n$

e) $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} = \frac{(n-3).(n-4).(n-5)!}{(n-5)!} = (n-3).(n-4) = n^2 - 7n - 12$

8. Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos. De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

a)69

b) 70

c) 90

d)104

e)105

9. **(Unifor–CE)** Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar a foto?

a) 24

b) 48

c) 96

d) 120

e) 720

10. (UFJF–MG) Newton possui 9 livros distintos, sendo 4 de Geometria, 2 de Álgebra e 3 de Análise. O número de maneiras pelas quais Newton pode arrumar esses livros em uma estante, de forma que os livros de mesmo assunto permaneçam juntos, é:

a) 288

b) 296

c) 864

d) 1728

e) 2130

11. (ITA–SP) Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes (juntos), mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

a) 144

b) 180

c) 240

d) 288

e) 360

12. (Enem/2012) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

13. (UTFPR) O número de palavras código de 5 letras que podem ser formadas com as letras a, b, c, d, e, f, g, h, sem que nenhuma letra possa ser repetida, é:

a) 56

b) 120

c) 720

d) 2401

e) 6720

4.2. Relatório Encontro 1

Relatório PROMAT

1° Encontro – 11/03/2023

No dia 11 de março de 2023 às oito horas da manhã, estavam presentes 27 alunos. Iniciamos o encontro com uma dinâmica de apresentação para conhecer melhor nossos alunos. Cada um se apresentou e falou onde residia. Após a apresentação pedimos para que dissessem o nome do colega do lado. O objetivo da dinâmica é fazer com que eles percebam a importância de escutar o outro.

Em seguida pedimos para que eles se reunissem em grupos de no máximo cinco pessoas. A primeira atividade adaptada do livro de Dante 2014, “em uma lanchonete há três tipos de sanduiche e refrigerante, e duas opções de sobremesa”. A alternativa a solicitava para que descobrissem de quantas maneiras o cliente poderia comer um sanduiche com um refrigerante sem a opção de sobremesa. A alternativa b pedia de quantas maneiras diferentes pode-se comer um sanduiche, um refrigerante e uma sobremesa. Foi destinado um tempo a eles para que tentassem resolver entre os grupos e em seguida feita a correção ao quadro.

No terceiro momento da aula foi introduzido o conceito de princípio fundamental da contagem. Entregamos aos alunos a lista de exercícios e destinamos um momento para eles tentarem resolver. Em todo momento as professoras estagiárias circulavam entre as carteiras para tirar as possíveis dúvidas. Depois foi pedido para que os alunos fossem até o quadro para resolver. Ficamos felizes, pois os alunos são bem participativos.

No quarto momento foi explicada a definição de fatorial, seguida de exercícios e correção deles. Em seguida explicamos sobre o intervalo dos encontros e os liberamos.

Na volta do intervalo pedimos para que três alunos se voluntariassem para realizar uma atividade. Pedimos inicialmente para que dois alunos se sentassem em duas cadeiras e, de quantos modos diferentes, poderiam sentar-se. Depois colocamos mais uma cadeira e mais um participante e verificamos de quantas maneiras diferentes eles poderiam se sentar. O objetivo da atividade é demostrar como funciona a permutação.

No sexto momento fizemos vários anagramas com a palavra asa, para demostrar a permutação por repetição. Houve bastante participação dos alunos nesse momento.

O restante da aula foi destinado para realização dos exercícios da lista e correção. Agradecemos a participação por terem vindo.

5. Encontro 2

5.1. Plano de Aula Encontro 2

Plano de Aula 2

18/03/2023

Conteúdo

Arranjo, Combinação e Probabilidade.

Público-alvo

Alunos inscritos no projeto de ensino Promat.

Objetivo geral

Preparar o aluno para questões do Enem e Vestibulares envolvendo os conceitos de análise combinatória e probabilidade.

Objetivos específicos

- Compreender os conceitos de arranjo e combinação.
- Diferenciar as técnicas de resolução de arranjo e combinação;
- Analisar situações problemas que envolvam probabilidade.

Tempo de execução

3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos

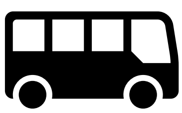
Lâminas, quadro, giz, material impresso, projetor, dados.

Encaminhamento metodológico

Iniciaremos a aula explanando os conceitos que pretendemos abordar neste encontro. Em seguida iramos abordar arranjo e suas aplicações através de problemas que envolvem o cotidiano dos alunos, para isso iremos utilizar o projetor.

Problema 1: Duas amigas entram em um ônibus com 4 lugares livres, de quantas maneiras elas podem se sentar?

Figura 2: Problema 1



(15min)

Uma sugestão para a resolução deste problema é enumerar todas as possibilidades existentes com o auxílio de uma simulação na turma.

Esperamos que nesse contexto os alunos interliguem essa situação com seus conhecimentos prévios sobre arranjo, que diferente da permutação, trabalhada no encontro anterior, a quantidade de elementos é diferente do número de posição que ele pode ocupar.

Após o compartilhamento de ideias no quadro apresentaremos a definição de Arranjo:

Arranjo Simples

Dado um conjunto com n elementos, e sendo p um número inteiro e positivo, tal que $p \leq n$, chama-se **Arranjo Simples** dos n elementos dados, agrupados p a p, qualquer sequência de p elementos distintos formada com os elementos do conjunto.

Nota: a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

(3-5min)

Propomos então que os alunos trabalham nos problemas 2 e 3 e compartilham suas ideias com seu grupo.

Problema 2: Dado o conjunto $A = \{1,\ 5, 7, 9\}$, quais os possíveis agrupamentos de 2 elementos que podemos formar?

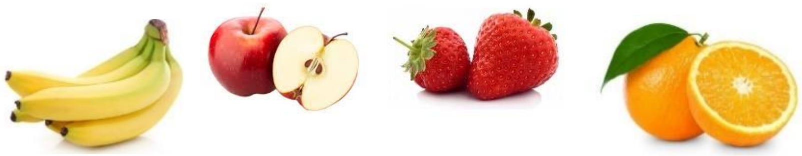
Problema 3: IEZZI (2016, p. 241) A senha de um cartão magnético bancário, usado para transações financeiras, é uma sequência de duas letras distintas (entre as 26 do alfabeto) seguida por uma sequência de três algarismos distintos. Quantas senhas podem ser criadas?

(15min)

Na sequência iremos trabalhar com um problema gerador para relembrar o conceito de combinação simples. Acompanhe a situação abaixo:

Problema 4: (Adaptado) Luana dispõe de 4 frutas para fazer uma vitamina: banana, maçã, morango e laranja. Quantas são as possibilidades de fazer uma vitamina com duas dessas frutas?

Figura 3 - Problema 4



Banana Maçã Morango Laranja

(10min)

Neste momento iremos levantar a questão sobre se ordem dos elementos interfere no resultado, neste caso não importa, pois, banana – maçã = maçã – banana.

Problemas onde a ordem dos elementos não importa são considerados problemas de Combinação Simples, veja abaixo sua definição:

Combinação Simples

Dados n elementos distintos, chama-se combinação desses n elementos tomados p a p (com $p \leq n$) qualquer subconjunto formado por k elementos distintos, escolhidos entre os n.

Nota: a ordem dos elementos não importa.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

(3-5min)

Para finalizar a discussão deixaremos os problemas 5 e 6 para os alunos resolvem em grupo, em seguida corrigiremos no quadro.

Problema 5: Há 20 alunos em uma sala de aula, ao iniciar a aula todos se cumprimentam, quantos apertos de mão ocorreram?

Problema 6: Uma urna contém 5 bolas azuis numeradas de 1 a 5 e 4 bolas vermelhas numeradas de 1 a 4. De quantas maneiras podemos selecionar:

a. 3 bolas?

b. 3 bolas azuis e 2 vermelhas?

c. 3 bolas vermelhas e 2 azuis?

(15min)

Intervalo (20min)

Após os alunos retornarem do intervalo iremos trabalhar com a probabilidade, para isso iremos realizar uma atividade lúdica envolvendo este conceito.

Jogo Corrida de Cavalos

Instruções do jogo

- 2 participantes.
- Cada jogador irá escolher de dois a três cavalos para apostar.
- Em seguida cada jogador irá rolar o dado, resultando assim em dois números, e a soma desses números irá identificar o cavalo que irá andar, por exemplo se o jogador 1 tirou o número 2 no dado e o jogador 2 tirou 4, o cavalo número 6 (2+4) irá avançar.
- O cavalo que passar a linha de chegada vence.

Figura 4 - Jogo

Registro das apostas												
Largada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chegada												

Fonte:http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital3/guias/guia_audiovisual_11.pdf

(30min)

Na sequência iremos envolver os alunos com questionamentos sobre as partidas, veja abaixo:

Analisando o jogo

Em quais cavalos vocês apostaram?

Alguém escolheu o cavalo 1? Qual foi o cavalo mais escolhido entre os grupos?

Quais foram os números que ganharam a partida?

Você traçou alguma estratégia no decorrer do jogo?

Veja abaixo as possibilidades de soma dos dois dados:

1 – Não temos

2 – (1,1)

3 – (1,2), (2,1)

4 – (1,3), (3,1), (2,2)

5 – (1,4), (4,1), (2,3), (3,2)

6 – (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)

7 – (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)

8 – (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)

9 – (3,6), (6,3), (4,5), (5,4)

10 – (4,6), (6,4), (5,5)

11 – (5,6), (6,5)

12 – (6,6)

Note que tínhamos mais possibilidades de vencer com o cavalo 7, e menos com o cavalo 2 e 12 por exemplo.

(10min)

Para prosseguir com a aula iremos definir o conceito de probabilidade, fazendo uma relação com a atividade anterior.

Probabilidade

Antes de definirmos o que é probabilidade vamos relembrar alguns conceitos:

Experimento aleatório: Todo experimento que, mesmo repetido várias vezes sob as mesmas condições, apresenta resultados imprevisíveis é chamado experimento aleatório.

Espaço amostral: O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado espaço amostral. Em geral, indicamos o espaço amostral por Ω (lemos ômega).

Evento: Todo subconjunto de um espaço amostral Ω é chamado evento. Em geral, indicamos um evento por uma letra maiúscula.

Probabilidade de ocorrer um evento: A probabilidade de ocorrer um evento A de um espaço amostral Ω finito é dado por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Onde $n(A)$ e $n(\Omega)$ representam a quantidade de elementos de A e de Ω, respectivamente.

Nota: A probabilidade definida acima só é válida se todos os elementos de Ω tiverem a mesma chance de ocorrer, ou seja, se Ω for um **espaço amostral equiprovável,** finito e não vazio.

(15min)

Para fixar esses conceitos e reconhecê-los em diversas situações problemas iremos projetar a probabilidade do cavalo 7 ganhar a corrida, assim como espaço amostral. Em seguida pediremos para os alunos resolverem alguns problemas da lista, enquanto as professoras circulam pela sala auxiliando.

Avaliação

A avalição será feita em todo momento da aula, os seguintes pontos são considerados: participação nas atividades e nas correções dos problemas, comunicação do aluno com os demais colegas e por fim a resolução dos exercícios propostos.

Bibliografia

BALESTRI, Rodrigo Dias. **Matemática:** interação e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Oceano Indústria e Editora, 2016. 240 p. Disponível em: http://joinville.ifsc.edu.br/~dani.prestini/Integrado%20%20Mec%C3%A2nica/20181/M%C3%B3dulo%202%20%20Matem%C3%A1tica%20II/Livro/Livro%202%20BALESTRI.pdf. Acesso em: 26 out. 2022.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto & aplicações. 2. Ed. São Paulo: Ática, 2013.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar:** combinatória, probabilidade. Vol. 5. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual do Paraná** (CREP): Matemática. Curitiba: SEED, 2019.

RITTER, Denise; BULEGON, Ana Marli. Sequência Didática para o ensino de probabilidade. In: **2 Fórum Integrado de Ensino e V Mostra Gaúcha de Produtos Educacionais**, 2021, Santa Maria. Anais da V Mostra Gaúcha de Produtos Educacionais e do 2 Fórum Integrado de Ensino. Santa Maria: Ed. Universidade Franciscana, 2021. v. 1. p. 1-8.

Anexo 1

2° Encontro - Exercícios

Conteúdo: Arranjo, Combinação e Probabilidade. **Data:** 18/03/2023

1. Qual é a quantidade de arranjos simples que podemos fazer utilizando 3 letras do conjunto {A, B, C, D, E}?

a) 10 b) 12 c) 15 d) 30 e) 60

$$An,k = \frac{n!}{n!\,(n-k)!}$$

$$A5{,}3 = \frac{5!}{(5-3)!}$$

$$A5{,}3 = \frac{5!}{2!}$$

$$A5{,}3 = \frac{5.4.3.2!}{2!}$$

$$A5{,}3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$A5{,}3 = 60$$

Os cargos poderão ser ocupados de 210 maneiras distintas.

2. Na busca de incentivar os estudantes da escola a participarem do evento de Halloween, um colégio decidiu sortear 3 prêmios para 10 estudantes que estiverem com as melhores fantasias, sendo os prêmios: uma bicicleta, um smartphone e um tablet. O número de maneiras distintas que podemos ter o resultado desse sorteio é:

a) 120 b) 250 c) 360 d) 720 e) 1480

Queremos calcular um arranjo de 10 elementos, tomados de 3 em 3:

$$A10{,}3 = \frac{10!}{(10-3)!}$$

$$A10{,}3 = \frac{10!}{7!}$$

$$A10{,}3 = \frac{10.9.8.7!}{7!}$$

$$A10{,}3 = 10 \cdot 9 \cdot 8$$

$$A10{,}3 = 720$$

3. Durante as eleições de diretor e vice-diretor escolar de uma escola estadual, ficou determinado pelo edital que o diretor seria o candidato mais votado e o vice-diretor o segundo candidato mais votado. Se, em determinada escola, 4 profissionais se candidataram para a vaga de gestor, o número de resultados distintos que podemos ter para diretor e vice-diretor é:

a) 8 b) 10 c) 12 d) 15 e) 16

Queremos calcular o arranjo de 4 elementos, tomados de 2 em 2:

$$A4{,}2 = \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$A4{,}2 = \frac{4!}{2!}$$

$$A4{,}2 = \frac{4.3.2!}{2!}$$

$$A4{,}2 = 12$$

4. O Senado federal é composto por 81 senadores, com mandatos que possuem duração de 8 anos. Dentro do Congresso será montada uma comissão, com o presidente da comissão, o relator da comissão, o secretário e o suplente. O número de comissões distintas que podem ser formadas, escolhendo 4 dentre os 81 senadores, pode ser calculado por:

a) $C_{81,4}$ b) $A_{81,4}$ c) 81! d) 81^4 e) 4^{81}

Como a ordem é importante e estamos escolhendo parte dos elementos do conjunto para cada agrupamento, então, nesse caso, os agrupamentos podem ser calculados por meio de um arranjo de 81 elementos, tomados de 4 em 4.

5. Durante o vestibular de uma universidade, o estudante deve escolher a primeira e a segunda opções de curso. Se nessa universidade há 12 opções de curso, então o número de maneiras distintas que um candidato pode escolher a primeira e a segunda opções é:

a) 33 b) 68 c) 132 d) 188 e) 244

$$A12{,}2 = \frac{12!}{(12-2)!}$$

$$A12{,}2 = \frac{12!}{10!}$$

$$A12{,}2 = 12 \cdot 11$$

$$A12{,}2 = 132$$

6. Em uma sala de aula existem 12 alunas, onde uma delas chama-se Carla, e 8 alunos, onde um deles atende pelo nome de Luiz. Deseja-se formar comissões de 5 alunas e 4 alunos. Determine o número de comissões, onde simultaneamente participam Carla e Luiz.

O número de comissões onde simultaneamente participam Carla e Luiz é 11550.

Como queremos formar comissões, então a ordem da escolha não é importante.

Vamos determinar a quantidade de maneiras que podemos escolher as 5 alunas e os 4 alunos.

$$C(n,k) \ = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Como na turma existem 12 alunas e Carla deve pertencer à comissão, então precisamos escolher mais 4 alunos entre as 11 disponíveis:

$$C(11{,}4) \ = \frac{11!}{4!\,7!}$$

$$C(11{,}4) \ = \ 330 \ comissões.$$

Como na turma existem 8 alunos e Luiz deve pertencer à comissão, então precisamos escolher mais 3 alunos entre os 7 disponíveis:

$$C(7{,}3) \ = \ 35 \ comissões.$$

Portanto, o total de comissões em que Carla e Luiz estão presentes, é igual a: $330.35 \ = \ 11550$.

7. Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando-se que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis que esse time pode ser formado.

Temos que escolher **1 goleiro entre os 3 disponíveis**. Então, a quantidade de maneiras que podemos fazer essa escolha é igual a:

$C(3,1) = \frac{3!}{1!2!}$

$$C(3,1) = 3.$$

Temos que escolher **4 zagueiros entre os 8 disponíveis**. Então, a quantidade de maneiras que podemos fazer essa escolha é igual a:

$C(8,4) = \frac{8!}{4!4!}$

$$C(8,4) = 70.$$

Temos que escolher **4 campistas entre os 10 disponíveis**. Então, a quantidade de maneiras que podemos fazer essa escolha é igual a:

$C(10,4) = \frac{10!}{4!6!}$

$$C(10,4) = 210$$

Por fim, precisamos escolher **2 atacantes entre os 6 disponíveis**. Então, a quantidade de maneiras que podemos fazer essa escolha é igual a:

$C(6,2) = \frac{6!}{4!2!}$

$$C(6,2) = 15.$$

Portanto, pelo **Princípio Multiplicativo**, o **número de maneiras possíveis que esse time pode ser formado** é igual a: 3.70.210.15 = **661500.**

8. Um pesquisador científico precisa escolher três cobaias, num grupo de oito cobaias. Determine o número de maneiras que ele pode realizar a escolha.

$$C8{,}3 \;= \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8.7.6.5!}{3!\,.5!} = 56$$

9. No jogo de basquetebol, cada time entra em quadra com cinco jogadores. Considerando-se que um time para disputar um campeonato necessita de pelo menos 12 jogadores, e que desses, 2 são titulares absolutos, determine o número de equipes que o técnico poderá formar com o restante dos jogadores, sendo que eles atuam em qualquer posição.

Dos 12 jogadores, 2 são titulares absolutos, então teremos 10 jogadores disputando 3 vagas. Portanto, temos a seguinte combinação: $C_{10,\ 3.}$

10. Com 12 bolas de cores distintas, posso separá-las de quantos modos diferentes em saquinhos, se o fizer colocando 4 bolas em cada saco?

$$C12{,}4 = \frac{12!}{4!\,(12-4)!} = \frac{12.11.10.9.8!}{4!\,8!} = 495$$

11. Um fabricante de sorvetes possui a disposição 7 variedades de frutas tropicais do nordeste brasileiro e pretende misturá-las duas a duas na fabricação de sorvetes. Quantos serão os tipos de sorvete disponíveis?

$C_{7,2} = 21$

12. Ao jogar um dado, qual a probabilidade de obtermos um número ímpar voltado para cima?

As chances de ocorrer um número ímpar são 3 em 6, que corresponde a 0,5 ou 50%.

13. Se lançarmos dois dados ao mesmo tempo, qual a probabilidade de dois números iguais ficarem voltados para cima?

Resposta correta: 0,1666 ou 16,66%.

14. Um saco contém 8 bolas idênticas, mas com cores diferentes: três bolas azuis, quatro vermelhas e uma amarela. Retira-se ao acaso uma bola. Qual a probabilidade da bola retirada ser azul?

37,5%.

15. Sorteando-se um número de 1 a 20, qual a probabilidade de que esse número seja múltiplo de 2?

16. (ENEM/2020 Reaplicação) Um determinado campeonato de futebol, composto por 20 times, é disputado no sistema de pontos corridos. Nesse sistema, cada time joga contra todos os demais times em dois turnos, isto é, cada time joga duas partidas com cada um dos outros times, sendo que cada jogo pode terminar empatado ou haver um vencedor.

Sabendo-se que, nesse campeonato, ocorreram 126 empates, o número de jogos em que houve ganhador é igual a:

a) 64 b) 74 c) 254 d) 274 e) 634

17. (UFPA) No cartão da mega-sena existe a opção de aposta em que o apostador marca oito números inteiros de 1 a 60. Suponha que o apostador conheça um pouco de Análise Combinatória e que ele percebeu que é mais vantajoso marcar um determinado número de cartões, usando apenas os oito números, de modo que, se os seis números sorteados estiverem entre os oito números escolhidos, ele ganha, além da sena, algumas quinas e algumas quadras. Supondo que cada aposta seja feita usando apenas seis números, a quantidade de cartões que o apostador deve apostar é

a) 8 b) 25 c) 28 d) 19 e) 17

$$N = C(8,6)$$

$$N = 8 * 7 * 6! \,/\, 2! * 6!$$

$$N = 56/2$$

$$N = 28$$

18. (Fuvest 2004) Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

a)12 b)18 c)36 d) 72 e) 108

Sendo as empresas: E1, E2 e E3

Sendo os trabalhos: T1, T2, T3 e T4

Primeiramente, possíveis arranjos para os três primeiros trabalhos:

(T1,T2,T3), (T1,T2, T4), (T1, T3, T4), (T2, T3, T4): 4 arranjos

Esses trabalhos vão se combinar com 3 empresas diferentes, logo:

$$3 \, x \, 4 = 12$$

Considerando agora as 3 possibilidades de escolha da empresa que realizará o quarto trabalho:

$$12 \, x \, 3 = 36$$

19. (UNICAMP) O grêmio estudantil de uma escola é composto por 6 alunos e 8 alunas. Na última reunião do grêmio, decidiu-se formar uma comissão de 3 rapazes e 5 moças para a organização das olimpíadas do colégio. De quantos modos diferentes pode-se formar essa comissão?

a)1 120 b)2 240 c)6 720 d)100 800 e)806 400

$$C6,3 \cdot C8,5 = 6!\ 3!/(6-3)! \cdot 8!\ 5!/(8-5)! = 1120$$

20. (Enem 2015) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a) 1/100 b) 19/100 c) 20/100 d) 21/100 e) 80/100

São 20 possibilidades em um universo de 100, portanto 20 / 100.

21. (Enem 2017) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

a) 0,075 c) 0,150 d) 0,325 e) 0,600

$$30\% \quad x \quad 50\% \quad + \quad 70\% \quad x \quad 25\% \quad = \quad 32,5\%$$

5.2. Relatório Encontro 2

Relatório PROMAT

2° Encontro – 18/03/2023

No dia 18 de março de 2023, às 8h da manhã, demos início ao segundo encontro do PROMAT. Iniciamos a aula solicitando a organização de grupos de 4 ou 5 pessoas. Posicionamos quatro cadeiras à frente da sala e chamamos dois voluntários para uma demonstração de diferentes formas que duas pessoas poderiam se sentar em quatro cadeiras.

Realizamos a explicação do conceito de arranjo simples e solicitamos para que os alunos realizassem dois problemas propostos por nós. Durante o momento de resolução dos problemas auxiliamos os alunos tirando algumas dúvidas.

Após alguns minutos realizamos as correções dos problemas propostos mostrando diferentes formas de resolver exercícios envolvendo arranjo. Em seguida apresentamos um quarto problemas e demos alguns instantes para que eles tentassem solucionar. A fim de instigar os alunos a participarem da aula, para correção perguntamos se teriam interesse de apresentar suas resoluções no quadro.

Figura 5 Aluno apresentando resolução

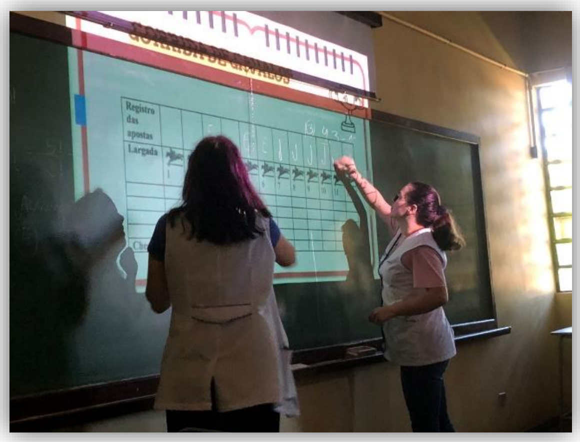
Fonte 2 - Acervo das Autoras

Na sequência apresentamos a formalização do conceito de Combinação. Com o intuito de fixar os conceitos apresentados, solicitamos a resolução de mais dois exercícios. Nesse encontro optamos pelo revezamento entre explicação, resolução de problemas e correção, com o objetivo de um aproveitamento maior da aula, com um foco maior em demostrar resoluções possíveis para diferentes tipos de exercícios.

Entregamos uma lista contendo 20 exercícios para que os alunos realizassem os primeiros ainda antes do intervalo. Após o lanche fizemos a correção dos primeiros exercícios convidando os alunos para participarem.

Para dar sequência no segundo momento da aula propusemos uma atividade em forma de jogo de apostas. Para explicação do jogo fizemos uma rodada teste utilizando o quadro o projetor.

Figura 6 - Apresentação do jogo



Fonte 3 - Acervo das autoras

Durante alguns minutos os alunos jogaram "Corrida de Cavalos" e tomaram notas sobre os dados obtidos. Com o objetivo de introduzir o conteúdo de Probabilidade, fizemos alguns questionamentos sobre o que concluíram sobre os resultados. Desta forma pudemos apresentar, utilizando os dados do jogo como exemplo, as definições de cada item do assunto de probabilidade. Em seguida os alunos realizaram mais alguns exercícios e logo na sequência fizemos a correção.

O conteúdo desse encontro gerou algumas discussões sobre qual conceito aplicar em qual situação. Muitas vezes houve confusão entre arranjo e combinação. Percebemos que o problema maior era na parte interpretativa do problema, em entender o que a questão solicitava. Na tentativa de reduzir as dúvidas finalizamos a aula com a correção dos exercícios.

6. Encontro 3

6.1. Plano de Aula Encontro 3

Plano de Aula 3

Conteúdo

Coordenadas cartesianas, Distância entre dois pontos, Ponto médio, Pontos colineares/condição de alinhamento entre três pontos (Determinante).

Público-alvo

Alunos inscritos no projeto de ensino Promat.

Objetivo geral

Preparar o aluno para questões do Enem e Vestibulares envolvendo os Geometria analítica.

Tempo de execução

3 horas e 40 minutos.

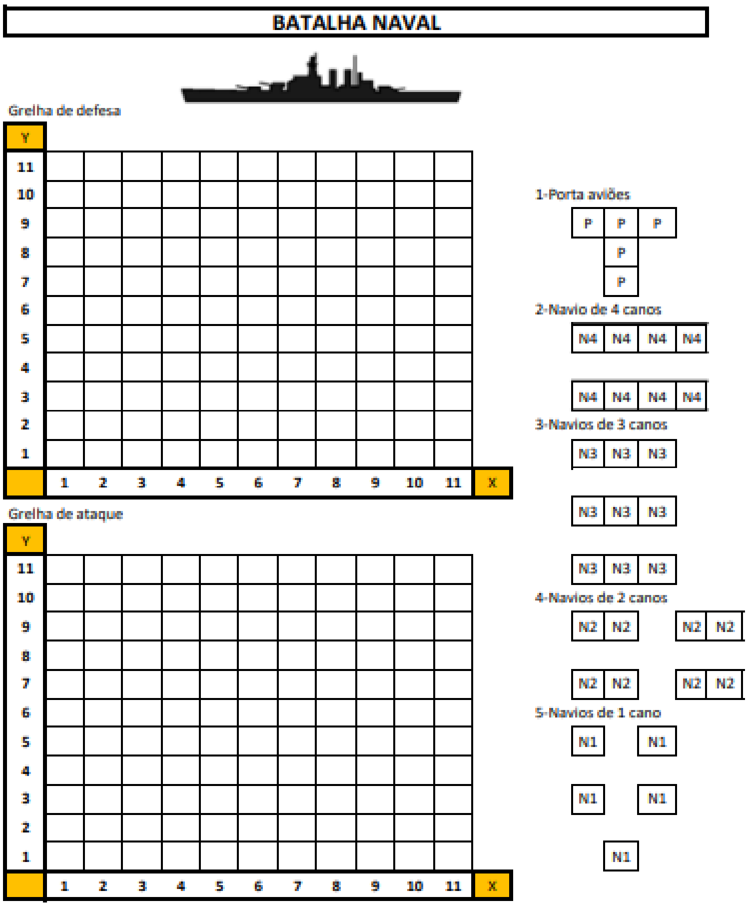
Recursos didáticos

Lâminas, quadro, giz, material impresso.

Encaminhamento metodológico

Iniciaremos como o Jogo Batalha Naval **(45 min)**

Figura 7 - Jogo Batalha Naval



Roteiro do Jogo

– Decida quem será o primeiro a jogar (pode ser no par ou ímpar);

– O primeiro jogador irá dar as coordenadas de seu tiro fornecendo o número e letra equivalentes ao quadrado que atirou;

– O segundo jogador responderá se o local do tiro é ÀGUA (quando o quadrado está vazio), FOGO (quando acerta uma parte de navio) ou AFUNDOU (quando acerta o navio inteiro ou todas as partes do navio);

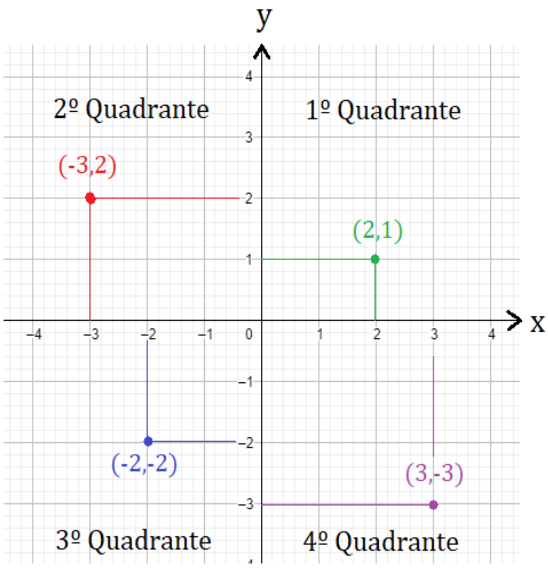
– Quem estiver atirando deverá marcar o local na área “JOGO DO ADVERSÁRIO“. Se for água marque com uma bolinha para não atirar no mesmo quadradinho mais de uma vez. Se for fogo marque com X, se afundou pinte o quadrado e já coloque bolinhas ao redor, pois nenhum navio pode encostar no outro.

– O adversário não poderá informar o tipo do navio, somente se foi FOGO ou AFUNDOU. Cabe ao outro jogador descobrir através das chances de tiros.
– Se o tiro acertou a água, passa a vez para o segundo jogador atirar. Se acertou o navio (parte ou inteiro) pode atirar novamente.

Após o jogo será introduzido o conceito de Plano Cartesiano.

Plano Cartesiano

Figura 8 - Plano Cartesiano



1° quadrante: $x > 0 \; e \; y > 0$
2° quadrante: $x < 0 \; e \; y > 0$
3° quadrante: $x < 0 \; e \; y < 0$
4 quadrante: $x > 0 \; e \; y < 0$

(5 min)

Após a explicação apresentaremos alguns exemplos de representação de pontos e polígonos no plano cartesiano.

Exemplo 1: Represente no plano cartesiano polígono ABCD, sendo A(2,3), B(0,5), C(-4,2) e D(4,-3).

Exemplo 2: Se A(m+3, n-1) e B(m-1,n-2) são pontos, respectivamente, do 1° e 4° quadrante, quais as possíveis soluções para m e n?

$\boldsymbol{Ponto\ A}: m + 3 > 0 \ \rightarrow m > -3$

$$n - 1 > 0 \ \rightarrow n > -1$$

$\boldsymbol{Ponto\ B}: m - 1 < 0 \ \rightarrow m < -1$

$n - 2 < 0 \ \rightarrow n < 0$

(15 min)

Em seguida será entregue uma lista de exercício para que os alunos respondam os primeiros exercícios. Durante esse processo as professoras estagiárias circularão pela sala sanando as possíveis dúvidas. Para finalizar está etapa serão selecionados alguns exercícios para serem corrigidos no quadro.

(20min)

Com o auxílio do slide apresentaremos a fórmula denominada para calcular a distância entre dois pontos.

Fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos

$$d = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Em seguida é feito juntamente com os alunos os seguintes exemplos, e alguns exercicios da lista que está em anexo.

Exemplo 1: Calcule a distância entre os pontos A e B nos seguintes casos:

a) $A(0,3) e\ B(5,0)$

b) $A(\frac{2}{3}, 1)\ B(-2, \frac{3}{2})$

(10 min)

Será destinado um tempo para os alunos resolverem os exercicios da lista, e correção.

(20 min)

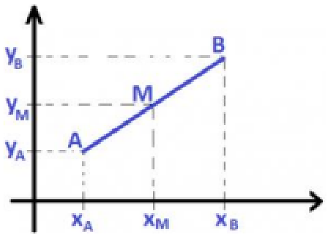
Intervalo (20 min)

Após o retorno do intervalo apresentado ponto médio entre dois pontos

Ponto Médio de um Segmento

Considere o segmento AB com extremidades nos pontos A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B). Seja M o ponto médio do segmento AB, onde M possui coordenadas (x_M, y_M).

Figura 9 - Ponto Médio



Nosso objetivo é calcular as coordenadas do ponto M, sabendo as coordenadas dos pontos A e B.

x_M é a média aritmética de x_A e x_B y_M é a média aritmética de y_A e y_B.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Portanto, sendo M o ponto médio do segmento AB, temos:

$$\boxed{M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

(10 min)

Após a explicação será destinado um momento para realização de exercícios da lista.

(20 min)

O último tópico da aula será a condição de alinhamento entre três pontos.

Condição de alinhamento entre três pontos

Três pontos estão alinhados se, e somente se, pertencerem à mesma reta.

Para verificarmos se os pontos estão alinhados, podemos utilizar a construção gráfica determinando os pontos de acordo com suas coordenadas posicionais. Outra forma de determinar o alinhamento dos pontos é através do cálculo do determinante pela regra de Sarrus envolvendo a matriz das coordenadas.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(10min)

O restante da aula será destinado para a realização de exercícios e suas respectivas correções

(20min)

Avaliação

A avaliação ocorrera de forma contínua, através da observação do desenvolvimento dos alunos com os problemas propostos.

Bibliografia

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2004. 418 p.

SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GENTIL, Nelson; GRECO, Sergio Emílio. **Matemática**. 6. ed. São Paulo: Àtica, 2002. 180 p.

Almanaque dos pais. Disponível em: https://www.almanaquedospais.com.br/batalha-naval-jogo-para-imprimir-e-regras/ . Acesso em: 22 mar. 2023.

Anexo 1

3° Encontro - Exercícios

Conteúdo: Coordenadas Cartesianas e pontos **Data:** 25/03/2023

1. Para que valores de m e n o ponto A(m-3, n-2) pertence ao 2° quadrante?

No segundo quadrante temos x<o e y>o, assim teremos:

$$m-3<0 \quad \Rightarrow m<3$$

$$n-2>0 \quad \Rightarrow \quad n>2$$

2. Sobre o plano cartesiano, julgue as afirmativas a seguir:

I - O eixo horizontal é conhecido também como eixo das abscissas.

II - O ponto A (-5, 3) é um ponto do terceiro quadrante.

III - O eixo vertical é conhecido também como eixo das coordenadas.

Podemos afirmar que:

A) Somente a afirmativa I é verdadeira. B) Somente a afirmativa II é verdadeira.

C) Somente a afirmativa III é verdadeira. D) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

E) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.

Resposta: A)

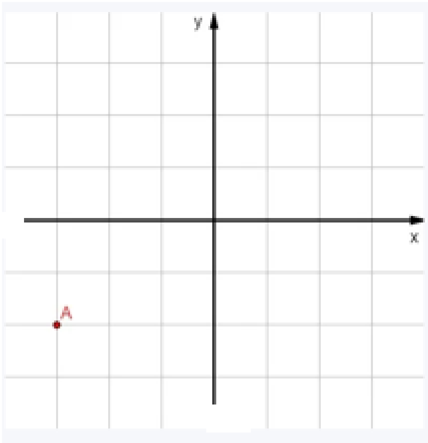
3. Em um plano cartesiano, foram marcados os pontos A (2, 3), B(-1, 2), C (2, -3) e D (1, 0). O único quadrante em que não há nenhum ponto marcado é:

A) I B) II C) III D) IV

Resposta: C)

4. Analisando a imagem, as coordenadas do ponto A são:

Figura 10 - Plano Cartesiano

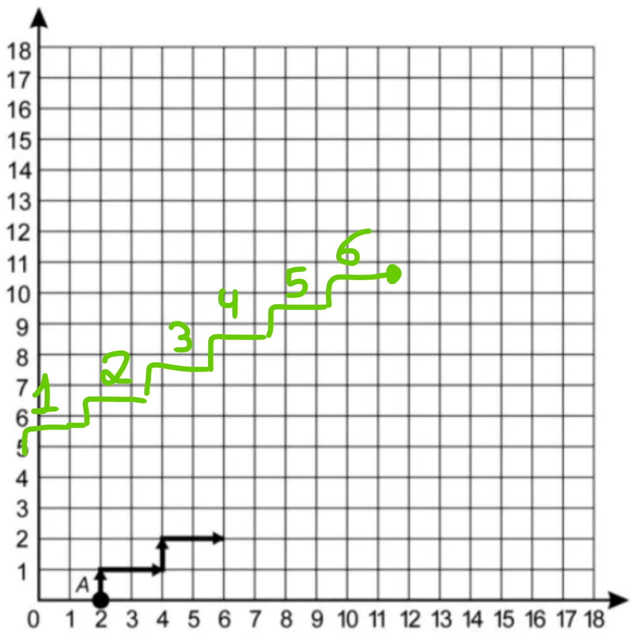


A) (3, 2) B) (-3, 2) C) (-3, -2) D) (-2, 3) E) (-2, 3)

Resposta: C)

5. (Enem Digital 2020) O gráfico mostra o início da trajetória de um robô que parte do ponto A (2; 0), movimentando-se para cima ou para a direita, com velocidade de uma unidade de comprimento por segundo, no plano cartesiano.

Figura 11 - Exercício 5



O gráfico exemplifica uma trajetória desse robô, durante 6 segundos.

Supondo que esse robô continue essa mesma trajetória, qual será sua coordenada, após 18 segundos de caminhada em todo percurso, contando o tempo a partir do ponto A?

A) (0; 18) B) (18; 2) C) (18; 0) D) (14; 6) E) (6; 14)

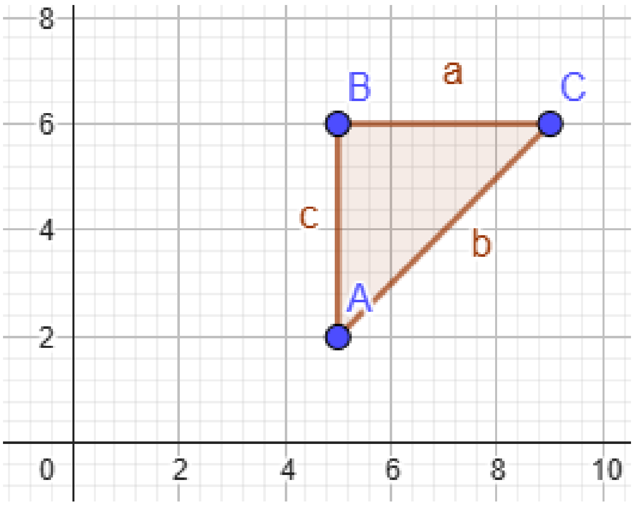
Resposta: D)

A cada 3s o robô faz o seguinte caminho “sobe 1 e direita 2”

Assim por 18 segundos o robô faz o trajeto seis vezes.

6. Verifique se o triângulo de vértices A (5,2), B(5,6) e C(9,6) é um triângulo equilátero, isósceles ou escaleno.

Figura 12 - Exercício 6



Analisando a imagem vemos que o triângulo é isóscele.

7. Obtenha o ponto P, pertencente ao eixo das ordenadas, que dista 10 unidades do ponto $Q(6,-5)$.

$$Q(6,-5) \quad e \quad P(0,y)$$

$$d = \sqrt{(x0 - x1)^2 + (y0 - y1)^2}$$

$$10 = \sqrt{6^2 + (-5 - y)^2}$$

$$10 = \sqrt{36 + (-5 - y)^2}$$

$$100 = 36 + (-5 - y)^2$$

$$64 = (-5 - y)^2$$

$$\pm 8 = -5 - y$$

$$y' = -5 - 8 = -13 \;\; ou\, y'' = -5 + 8 = 3$$

8. Calcule a distância entre dois pontos: A (-2,3) e B (1,3).

$$d = \sqrt{(x0 - x1)^2 + (y0 - y1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - 3)^2}$$

$$d = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2}$$

$$d = \sqrt{9} = 3$$

9. Se tivermos os pontos (-4, -2) e (6, 5) conectados por um segmento de reta, qual é o seu ponto médio?

$$xm = \frac{xa + xb}{2} \qquad ym = \frac{ya + yb}{2}$$

$$xm = \frac{6 - 4}{2} = 1 \qquad ym = \frac{5 - 2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$Assim\ o\ ponto\ médio\ é\ m = (1, \frac{3}{2})$$

10. O ponto médio de um segmento tem coordenadas (-3, -4). Se os pontos finais do segmento forem (3, -1) e (m, -7), encontrar o valor de m.

$$xm = \frac{xa + xb}{2}$$

$$-3 = \frac{3 + m}{2}$$

$$-6 = 3 + m$$

$$m = -9$$

11. verifique se os pontos:

a) A(0,2), B(-3,1) e C(4,5) estão alinhados;

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 8 - 4 - 0 + 6 = -5 \neq 0,$$

$$portanto\ os\ pontos\ não\ estão\ alinhados$$

b) A(-1,3), B(2,4) e C (-4,10) podem ser vértices de um triângulo?

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 20 - 12 + 16 + 10 - 6 = 24 \neq 0,$$

$$portanto\ os\ pontos\ não\ estão\ alinhados\ assim\ podem\ ser\ vértices\ de\ triângulo$$

12. Determine x de maneira que os vértices que os pontos A(3,5), B(1,3) e C(x,1), sejam os vértices de um triângulo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 1 + 5x - 3x - 5 - 3 = 2x + 2$$

$$Para\ os\ pontos\ não\ serem\ colineares\ 2x + 2$$
$$\neq 0, assim\ vamos\ descobrir\ quando\ 2x + 2 = 0$$

$$x = -1, assim\ x\ pode\ ser\ qualquer\ número\ exceto\ x = -1$$

13. Determine m sabendo que A(2,m), B(4,1) e C(m,-4) estão alinhados.

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ m & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + m^2 - 16 - m + 8 - 4m$$

$$m^2 - 5m - 6 = 0$$

$$m = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.(-6)}}{2.1}$$

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2}$$

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$m = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$m' = \frac{5+7}{2} = 6 \quad e\, m'' = \frac{5-7}{2} = -1$$

14. (FAAP-SP) Se os pontos A(2,-1) B(x,4) e C(4,9) pertence à mesma reta, determine x .

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ x & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 9x - 4 - 16 - 18 + x$$

$$10x - 30 = 0$$

$$10x = 30$$

$$x = 3$$

6.2. Relatório Encontro 3

Relatório PROMAT

3° Encontro – 25/03/2023

No dia 25 de março de 2023, às 8h da manhã demos início ao terceiro encontro do PROMAT, com 26 aulos presentes. Iniciamos a aula solicitando a organização de duplas, e explicamos o jogo Batalha Naval. Os alunos estavam apresentando dúvidas constantes, então explicamos novamente utilizando o quadro, com o objetivo de sanar as dúvidas.

Durante a realização do jogo percebemos que os alunos apresentavam bastante dificuldade em compreender as regras e os comandos necessários para jogar. Buscamos auxiliá-los para que o jogo pudesse transcorrer de maneira correta. Inversões das coordenadas ocorreram com frequência entre as duplas. Por exemplo, para indicar o ponto (1,2) eles ditavam as coordenadas (2,1). Intervimos quando necessário para que eles compreendessem que o eixo “X” deveria corresponder à primeira coordenada.

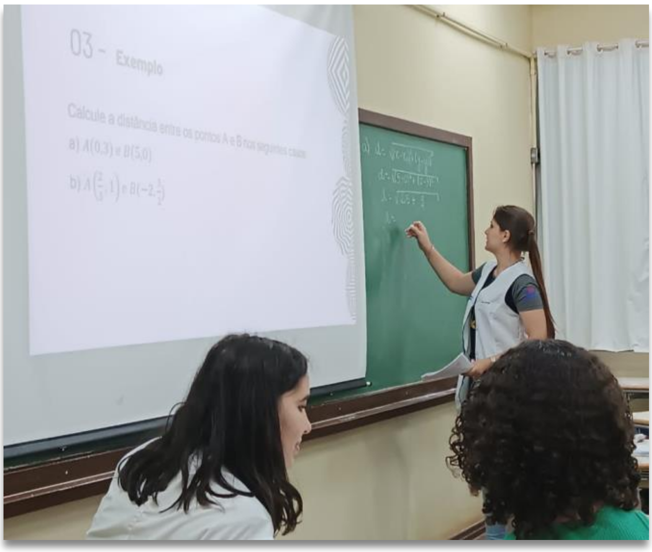
Figura 13 - Jogo Batalha Naval

Fonte 4 - Acervo das autoras

Disponibilizamos 45 minutos para o jogo, e então anunciamos que seguiríamos com o conteúdo. Apresentamos o plano cartesiano, e relembramos o nome dos eixos e a maneira que as coordenadas são representadas. Utilizamos o *GeoGebra* para posicionar os pontos (2,3), (0,5), (-4,2), (4,-3) na malha quadriculada e depois criamos um polígono não regular. Solicitamos que solucionassem o exemplo dois do plano de aula, e como envolvia desigualdade, precisamos relembrá-los pois apresentaram bastante dificuldade em compreender o que deveria ser feito.

Após o exemplo solicitamos que resolvessem os exercícios do 1 ao 4 da lista. Deixamos um tempo para que pensassem e logo após liberamos para os 20 minutos de intervalo. Ao retornarmos, corrigimos os exercícios no quadro junto com os alunos. Em seguida apresentamos a fórmula para calcular a distância entre dois pontos de utilizamos um exemplo para explicar a fórmula. Na atividade seguinte havia números fracionários, e percebemos a dificuldade dos alunos em manipular frações. Por isso os auxiliamos constantemente para que conseguissem solucionar a atividade proposta. Após o término do tempo proposto para a resolução, corrigimos os exercícios no quadro com o auxílio dos alunos. Percebemos que estavam um pouco dispersos no momento da correção. Às 10 horas e 35 minutos uma das alunas pediu autorização para sair mais cedo, pois precisava pegar o ônibus no terminal.

Figura 14 - Correção da Atividades



Fonte 5 - Acervo das autoras

Ao abordarmos sobre ponto médio e em seguida resolvemos o exercício nove da lisa que abordava o conteúdo de ponto médio. Os alunos participaram da resolução auxiliando nos cálculos. Por fim, abordamos a condição de alinhamento entre três pontos e resolvemos o determinante em um exemplo. Solicitamos que os alunos organizassem as carteiras, e os dispensamos logo em seguida.

7. Encontro 4

7.1. Plano de Aula Encontro 4

Plano de Aula 4

01/04/2023

Conteúdo

Equação geral e reduzida da reta e posições relativas entre duas retas.

Público-alvo

Alunos inscritos no projeto de ensino Promat.

Objetivo geral

Preparar o aluno para questões do Enem e Vestibulares envolvendo os conceitos de geometria analítica.

Objetivos específicos

- Obter a equação geral/reduzida da reta a partir de dois pontos;
- Obter a equação da reta conhecendo o coeficiente angular e um ponto;
- Representar os gráficos de retas a partir da sua equação;
- Definir e reconhecer a posição relativa entre duas retas analisando seus coeficientes angulares;

Tempo de execução

3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos

Lâminas, quadro, giz, material impresso, projetor.

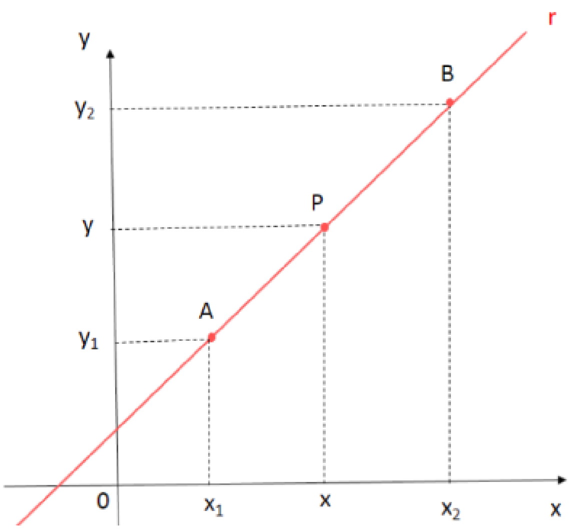
Encaminhamento metodológico

Iniciaremos a aula introduzindo o conceito de equação geral da reta através da condição de alinhamento de três pontos visto aula passada.

EQUAÇÃO GERAL DA RETA

Consideraremos a reta r passando pelos pontos A(x1, y2) e B(x2, y2), veja a figura abaixo:

Figura 15: Representação gráfica da reta r



Note que todos os pontos da reta r estão alinhados aos pontos A e B, simultaneamente. Com isso podemos definir P(x, y) utilizando a condição de alinhamento de três pontos, veja abaixo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x.y1 + x1.y2 + y.x2 - x2.y1 - y.x1 - x.y2 = 0$$

Reorganizando temos,

$$\Rightarrow \quad x.\underbrace{(y1 - y2)}_{a} + y.\underbrace{(x2 - x1)}_{b} + \underbrace{x1.y2 - x2.y1}_{c} = 0$$

Substituindo na equação $a = y1 - y2,\ b = x2 - x1\ e\ c = x1.y2 - x2.y1$ chegamos na equação geral da reta dada por:

$$ax + by + c = 0$$

Com $a, b\ e\ c$ coeficientes reais tais que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

(10min)

Após a explicação será solicitado que os alunos resolvam dois exemplos, em seguida corrigiremos no quadro.

1. (BALESTRI, 2016)Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos P(2, -2) e Q(5,-1)

2. Numa pesquisa realizada com duas turmas com idades em torno de 14 a 16 anos coletou os seguintes dados:

- O número total de aparelhos eletrônicos pertencentes aos estudantes das turmas é de 110 dispositivos, dentre computadores e celulares .

- 24 estudantes não possuem computadores ou celulares.

- Ao dobrar o número de celulares e computadores é obtido um total de 220 dispositivos dentre computadores e celulares.

- A diferença entre celulares e computadores é de 12 dispositivos.

A partir das informações acima deseja-se saber: quantos celulares e quantos computadores as turmas pesquisadas possuem?

(15min)

Na sequência iremos trabalhar equação reduzida da reta e seu coeficiente angular.

EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

A equação reduzida da reta é dada por

$$y = mx + n$$

Onde m é o coeficiente angular e n o coeficiente linear.

O coeficiente angular é dado por

$$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} = tg\ \beta$$

Se o coeficiente angular for positivo, a reta representará uma função crescente, se for negativo, representará uma função decrescente.

Vamos analisar o comportamento do coeficiente angular e linear na reta com o auxílio do GeoGebra.

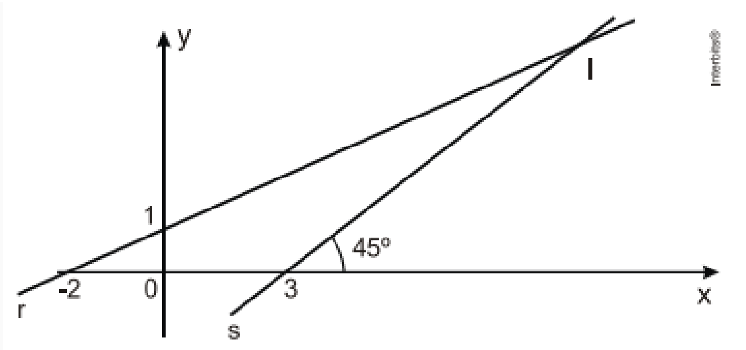
(10min)

Após a discussão iremos trabalhar dois exemplos no quadro, retirando dúvidas.

1. Determine a equação da reta que têm coeficiente angular $m = -2$ e passe pelo ponto:

a) (-3, -2) b) (5,3)

2. (PUC -SP) Suponha que no plano cartesiano mostrado na figura abaixo, em que a unidade de medida dos eixos coordenados é o quilômetro, as retas **r** e **s** representam os trajetos percorridos por dois navios N1 e N2, antes de ambos atracarem em uma ilha, localizada no ponto **I**.



Considerando que, quando N1 e N2 se encontravam atracados em I, um terceiro navio, N3, foi localizado no ponto de coordenadas (26; 29), a quantos quilômetros N3 distava de I?

(15min)

Na sequência deixaremos os alunos resolverem os exercícios da lista até o intervalo.

Para descontrair iremos realizar o jogo

Intervalo(20min)

Para descontrairmos iremos realizar o jogo divisão em linhas (Adaptado), com o objetivo para trabalhar os conceitos de equação geral e reduzida da reta e o processo de obtenção de seus coeficientes.

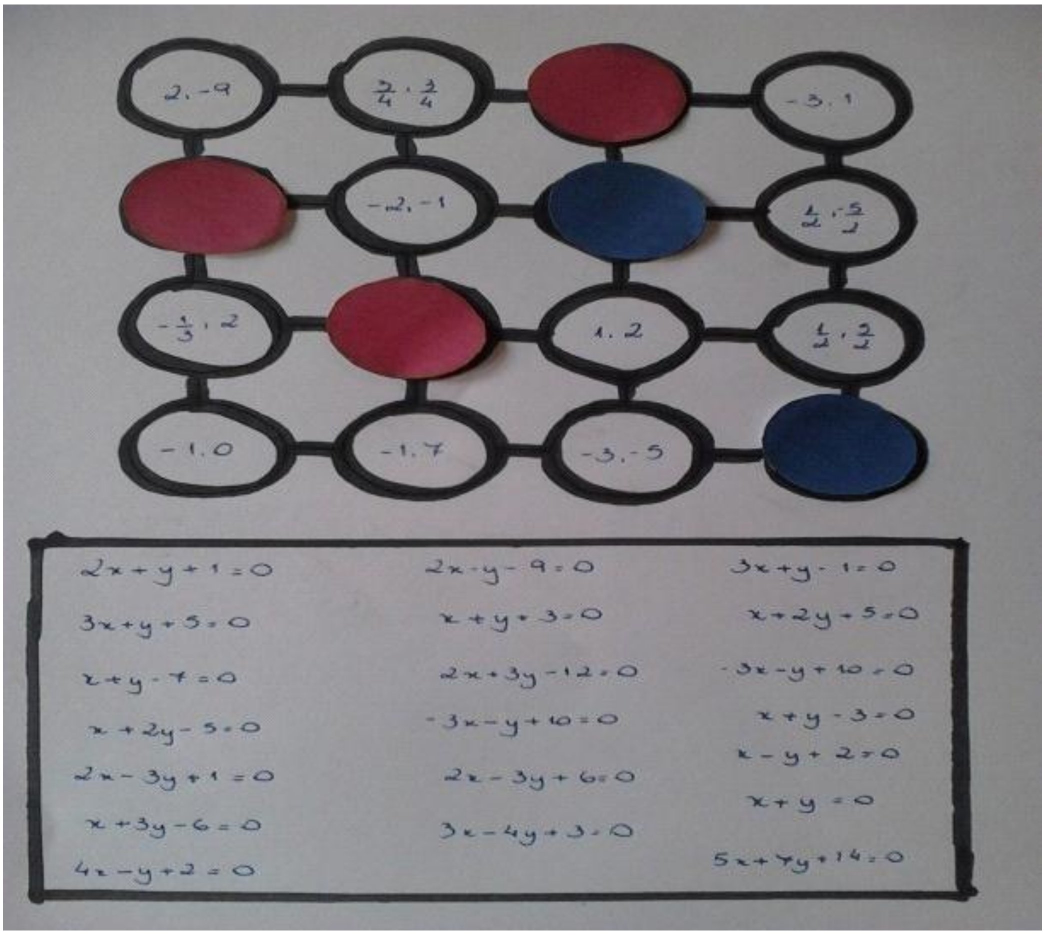
JOGO DIVISÃO EM LINHAS

- 2 jogadores por tabuleiro (Anexo A);
- No tabuleiro cada círculo contém o valor do coeficiente angular e do coeficiente linear, respectivamente. Na região retangular estará inscrito 20 equações na

forma geral, sendo que apenas 16 delas tem seus coeficientes inscritos nos círculos.

- Para iniciar o jogo cada jogador escolhe uma cor de ficha, em seguida decidem quem vai iniciar a partida.
- O jogador 1 irá escolher uma equação da reta, na sequência irá descobrir seu coeficiente angular e linear e assim tentar encontrar os coeficientes no círculo. Se a resposta dos coeficientes estiver no tabuleiro, o jogador cobre-a com uma de suas fichas.
- O ganhador será aquele que alinhar quatro fichas na horizontal, vertical ou horizontal.

Figura 16: Exemplo de partida



Fonte: https://talentospedagogicos.blogspot.com/2014/03/jogos-matematicos.html

(30min)

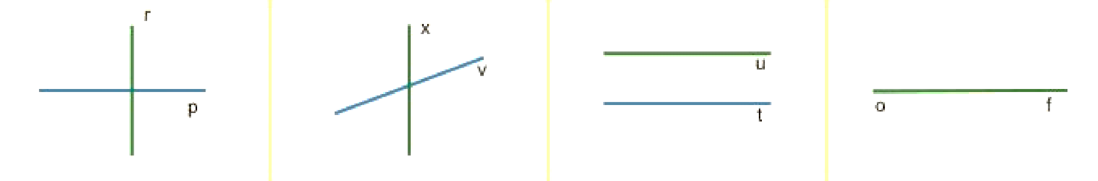
Após o jogo iremos abordar posição relativa entre duas retas.

POSIÇÃO RELATIVA ENTRE DUAS RETAS

Em um mesmo plano duas retas podem ser concorrentes, paralelas ou coincidentes. Veja abaixo:

Figura 17 - Posições Relativas entre Retas

Posição relativa de duas retas no plano



Retas concorrentes				Retas paralelas			
Notação	$r \perp p$	**Notação**	$x \not\perp v$	**Notação**	$u /\!/ t$	**Notação**	$o \equiv f$
Leitura	r é perpendicular a p	**Leitura**	x é oblíqua a v	**Leitura**	u é estritamente paralela a t	**Leitura**	o é coincidente com f

Fonte 6 - Disponível em: http://sextoanoprofessoraregiane.blogspot.com/

Duas retas **r** e **s**, cujas equações reduzidas são $y = mr.x + nr$ e $y = ms.x + ns$ respectivamente são:

- Paralelas se, e somente se, $mr = ms$ e $nr \neq ns$;

- Coincidentes se, e somente se, $mr = ms$ e $nr = ns$;

- Concorrentes se, e somente se, $mr \neq ms$.

Caso especial

Dada duas retas perpendiculares **r** e **s**, seus coeficientes angulares apresentam a seguinte propriedade:

$$mr = -\frac{1}{ms}$$

(15min)

Na sequência deixaremos dois exercícios para os alunos resolverem, em seguida iremos convidar os alunos para a correção no quadro.

1. (BALESTRI, 2016) Determine a posição relativa entre as retas abaixo.

a) $r: 2x + y + 8 = 0 \ \ e \ \ s: y = 5x - 2$

b) $r: -12x + 8y + 8 = 0 \ \ e \ \ s: 2x + 3y = 10$

c) $r: x = 3 - y \ \ e \ \ s: 6x + 6y + 1 = 0$

d) $r: 6x - 12y - 1 = 0 \ \ e \ \ s: 2x = \frac{1}{3} + 4y$

2. Obtenha a equação da reta r que passa pelo ponto P(1,5) e é perpendicular à reta $s: 2x + y + 4 = 0$

(15min)

Avaliação

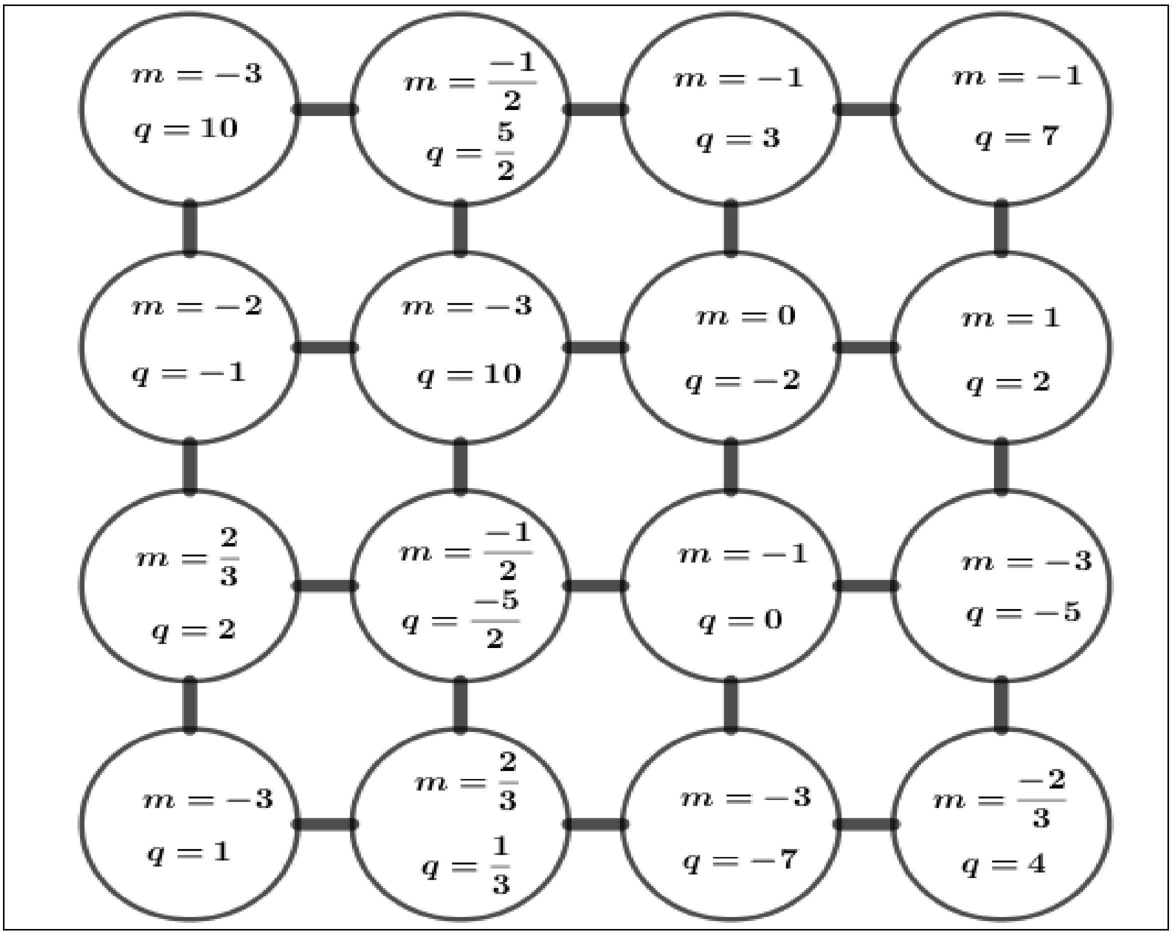
A avalição será feita em todo momento da aula, os seguintes pontos são considerados: participação nas atividades e nas correções dos problemas, comunicação do aluno com os demais colegas e por fim a resolução dos exercícios propostos.

Bibliografia

BALESTRI, Rodrigo. Matemática: interação e tecnologia. Vol 3. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

PAIVA, Manoel. Matemática Volume Único. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2005.

Anexo 1



$2x + y + 1 = 0$	$2x + y - 9 = 0$	$x + 2y + 5 = 0$
$3x + y + 5 = 0$	$x + y + 3 = 0$	$-3x - y + 10 = 0$
$x + y - 7 = 0$	$2x + 3y - 12 = 0$	$x + y - 3 = 0$
$x + 2y - 5 = 0$	$-3x - y + 10 = 0$	$x - y + 2 = 0$
$2x - 3y + 1 = 0$	$2x - 3y + 6 = 0$	$x + y = 0$
$x + 3y - 6 = 0$	$3x - 4y + 3 = 0$	$12x + 4y + 28 = 0$
$y + 2 = 0$	$3x + y - 1 = 0$	

Anexo 2

4° Encontro

Conteúdo: Equação geral e reduzida da reta, posições relativas das retas
Data: 01/04/2023

1. Determine a equação geral da reta que contém os pontos:

a) A (1,1) e B (0,2)

$$m = \frac{(y^2 - y^1)}{x_2 - x_1)}$$

onde $(x_1, y_1) = A(1,1)\ e\ (x_2, y_2) = B(0,2).$

Substituindo as coordenadas, temos:

$$m = \frac{(2 - 1)}{(0 - 1)}$$

Agora que temos a inclinação (m = -1), podemos substituir os valores na fórmula da equação geral da reta usando um dos pontos, como A(1,1):

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

$$y - 1 = -1(x - 1),$$

$$y - 1 = -x + 1,$$

$$y = -x + 2.$$

Portanto, a equação geral da reta que contém os pontos A(1,1) e B(0,2) é

$$y = -x + 2.$$

b) A (1, -2) e B (2,-5)

$$m = \frac{(y^2 - y^1)}{(x_2 - x_1)}$$

onde $(x_1, y_1) = A(1, -2)\ e\ (x_2, y_2) = B(2, -5).$

Substituindo as coordenadas, temos:

$$m = \frac{\big(-5 - (-2)\big)}{(2 - 1)}$$

$$= \frac{-3}{1}$$

$$= -3.$$

Agora, substituímos os valores na fórmula da equação geral da reta usando um dos pontos, como A(1, -2):

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

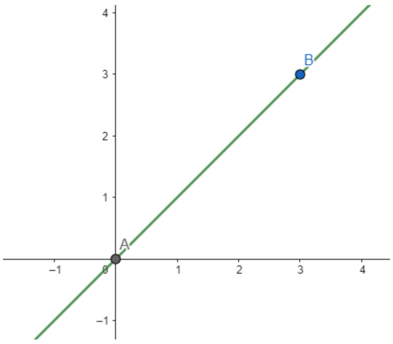
$$y - (-2) = -3(x - 1),$$

$$y + 2 = -3(x - 1),$$

$$y + 2 = -3x + 3,$$
$$y = -3x + 1.$$

Portanto, a equação geral da reta que contém os pontos A(1, -2) e B(2, -5) é $y = -3x + 1$.

2. Escreva a equação geral da reta r, conhecendo a sua representação geométrica

a) 

$$m = \frac{(y^2 - y^1)}{(x_2 - x_1)}$$

onde $(x_1, y_1) = (0,0)\ e\ (x_2, y_2) = (3,3)$.

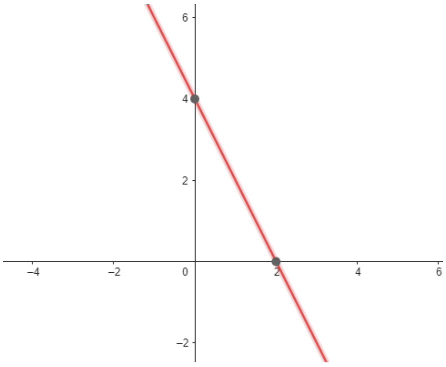
Substituindo as coordenadas, temos:

$$m = \frac{(3 - 0)}{(3 - 0)}$$
$$= \frac{3}{3}$$
$$= 1.$$

Agora, substituímos os valores na fórmula da equação geral da reta usando um dos pontos, como (0,0):

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$
$$y - 0 = 1(x - 0),$$
$$y = x.$$

Portanto, a equação geral da reta que contém os pontos (0,0) e (3,3) é $y = x$.

b) 

$$m = \frac{(y^2 - y^1)}{(x_2 - x_1)}$$

onde $(x_1, y_1) = (2{,}0)\ e\ (x_2, y_2) = (0{,}4)$.

Substituindo as coordenadas, temos:

$$m = \frac{(4 - 0)}{(0 - 2)}$$

$$= \frac{4}{-2}$$

$$= -2.$$

Agora, substituímos os valores na fórmula da equação geral da reta usando um dos pontos, como (2,0):

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

$$y - 0 = -2(x - 2),$$

$$y = -2x + 4.$$

Portanto, a equação geral da reta que contém os pontos (2,0) e (0,4) é $y = -2x + 4$.

3. Verifique se o ponto P (2,1) pertence à retar, cuja equação é $x + 3y - 5 = 0$.

Para verificar se o ponto P (2,1) pertence à reta representada pela equação $x + 3y - 5 = 0$, podemos substituir as coordenadas do ponto P na equação da reta e verificar se a igualdade é satisfeita.

Substituindo $x = 2\ e\ y = 1$ na equação da reta, temos:

$$2 + 3(1) - 5 = 0.$$

Simplificando a expressão, obtemos:

$$2 + 3 - 5 = 0,$$

$$5 - 5 = 0,$$

$$0 = 0.$$

A igualdade é satisfeita, pois ambos os lados da equação são iguais a zero.

Portanto, o ponto P (2,1) pertence à reta representada pela equação x + 3y - 5 = 0.

4. Qual o valor de m para que o ponto $P(m, 2)$ pertença à reta r de equação $x + 2y - 2 = 0$.

Para determinar o valor de m para que o ponto $P(m, 2)$ pertença à reta r com a equação $x + 2y - 2 = 0$, precisamos verificar se as coordenadas do ponto P satisfazem a equação da reta.

Substituindo as coordenadas do ponto P na equação da reta, temos:

$$m + 2(2) - 2 = 0$$

Simplificando a expressão, temos:

$$m + 4 - 2 = 0$$

$$m + 2 = 0$$

Para que essa igualdade seja verdadeira, m deve ser igual a -2. Portanto, o valor de m que faz com que o ponto $P(m, 2)$ pertença à reta r é $m = -2$.

5. As retas representadas pela equação $-2x + y + 3 = 0$ e s, cuja equação é $x - y - 1 = 0$ se encontram no ponto $P(x, y)$. determine as coordenadas de P.

O sistema de equações é dado por:

$-2x + y + 3 = 0$ (Equação da reta r)

$x - y - 1 = 0$ (Equação da reta s)

Podemos resolver esse sistema utilizando o método de substituição ou o método de adição/eliminação. Vamos utilizar o método de substituição.

A partir da equação da reta s, podemos isolar x em termos de y:

$$x = y + 1$$

Agora substituímos essa expressão para x na equação da reta r:

$$-2(y + 1) + y + 3 = 0$$

Resolvendo essa equação:

$$-2y - 2 + y + 3 = 0$$

$$-2y + y + 1 = 0$$

$$-y + 1 = 0$$

$$-y = -1$$

$$y = 1$$

Agora que temos o valor de y, podemos substituí-lo na equação da reta s para encontrar o valor correspondente de x:

$$x = y + 1$$

$$x = 1 + 1$$

$$x = 2$$

Portanto, as coordenadas do ponto de interseção P são P(2, 1).

6. (Mack-SP) A equação da reta que passa pelos pontos A(3,1) e B(-2,0) é:

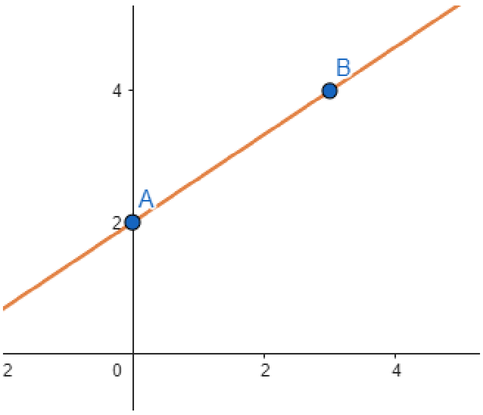
a) $-5y + x - 2 = 0$

b) $5y - x - 2 = 0$

c) $-x - 5y + 2 = 0$

$letra\ c$

7. (UCS-RS) A figura contém a representação gráfica da reta:



a) $2x - 3y + 6 = 0$ b)$2x + 3y - 6 = 0$ c)$2x - 3y - 2 = 0$ $d)2x + 3y + 2 = 0$

$$Resposta\ correta\ letra\ a$$

8. Conhecendo-se a equação geral da reta $r: 3x + 2y - 16 = 0$. obter:

a) A equação reduzida

b) O coeficiente angular

c) O coeficiente linear

Para obter a equação reduzida da reta r, podemos isolar y na equação geral:

$$3x + 2y - 16 = 0$$

$$2y = -3x + 16$$

Dividindo toda a equação por 2:

$$y = (-\frac{3}{2})x + 8$$

Portanto, a equação reduzida da reta r é $y = (-\frac{3}{2})x + 8$.

A partir da equação reduzida, podemos identificar o coeficiente angular. O coeficiente angular é o número que multiplica x na equação reduzida. Nesse caso, o coeficiente angular é -3/2.

O coeficiente linear é o termo independente na equação reduzida, que é o número 8 nesse caso.

Portanto, para a equação geral da reta r: $3x + 2y - 16 = 0$, temos:

Equação reduzida: $y = (-\frac{3}{2})x + 8$

Coeficiente angular: $-3/2$

Coeficiente linear: 8

9. Considerando a equação geral da reta r determine o coeficiente angular e linear:

a) $2x + 3y - 1 = 0$

3y = -2x + 1

Dividindo toda a equação por 3:

$$y = \left(-\frac{2}{3}\right)x + \frac{1}{3}$$

Portanto, o coeficiente angular dessa equação é $-\frac{2}{3}$.

O coeficiente linear é o termo independente na equação, que é $\frac{1}{3}$.

Portanto, para a equação $2x + 3y - 1 = 0$:

Coeficiente angular: $-\frac{2}{3}$

Coeficiente linear: $\frac{1}{3}$

b) $x - y + 4 = 0$

Nessa equação, o coeficiente angular já está explícito e é -1. Portanto, o coeficiente angular é -1.

O coeficiente linear é o termo independente na equação, que é 4.

Portanto, para a equação $x - y + 4 = 0$:

Coeficiente angular: -1

Coeficiente linear: 4

c) $2x + y - 5 = 0$

$$y = -2x + 5$$

Portanto, o coeficiente angular é -2.

O coeficiente linear é o termo independente na equação, que é 5.

Portanto, para a equação $2x + y - 5 = 0$:

Coeficiente angular: -2 Coeficiente linear: 5

10. Conhecendo a equação geral da reta, obtenha a equação reduzida, o coeficiente angular e o coeficiente linear de r:

a) $2x - 3y + 1 = 0$

b) $x + 3y - 6 = 0$

c) $4x - y + 2 = 0$

d) $2x - 3y + 6 = 0$

Equação reduzida: $y = (2/3)x - 1/3$

Coeficiente angular: $2/3$

Coeficiente linear: -$1/3$

Equação reduzida: $y = (-1/3)x + 2$

Coeficiente angular: $-1/3$

Coeficiente linear: 2

Equação reduzida: $y = 4x + 2$

Coeficiente angular: 4

Coeficiente linear: 2

Equação reduzida: $y = (2/3)x + 2$

Coeficiente angular: $2/3$

Coeficiente linear: 2

11. Classifique as retas r e s conforme suas posições relativas:

a) $2x - y + 20 = 0$ e $2x - y + 1 = 0$

b) $x - y - 3 = 0$ e $2x - 2y + 3 = 0$

c) $x + 2y - 5 = 0$ e $x + 2y - 5 = 0$

As retas $r: 2x - y + 20 = 0$ e $s: 2x - y + 1 = 0$ são paralelas.

As retas $r: x - y - 3 = 0$ e $s: 2x - 2y + 3 = 0$ são coincidentes.

As retas $r: x + 2y - 5 = 0$ e $s: x + 2y - 5 = 0$ são a mesma reta.

12. Sabe-se que o ponto A pertence à reta s e esta é paralela a r. Determine a equação geral da reta s, em cada caso:

a) $A(1, -3)$ e $(r) 2x - y + 5 = 0$

Para obter o coeficiente angular da reta r, podemos reescrever a equação na forma y = mx + b, onde m é o coeficiente angular:

$$-y = -2x + 5$$

$$y = 2x - 5$$

O coeficiente angular da reta r é 2.

Agora, podemos usar o ponto A(1, -3) e o coeficiente angular 2 para obter a equação da reta s:

$$y - y1 = m(x - x1)$$

$$y - (-3) = 2(x - 1)$$

$$y + 3 = 2x - 2$$

$$2x - y - 5 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta s é $2x - y - 5 = 0$.

b) $A\ (-2, -3)$ e $(r)\ 5x + 4y + 2 = 0$

Para obter o coeficiente angular da reta r, podemos reescrever a equação na forma y = mx + b, onde m é o coeficiente angular:

$$4y = -5x - 2$$

$$y = (-5/4)x - 1/2$$

O coeficiente angular da reta r é -5/4.

Agora, podemos usar o ponto A(-2, -3) e o coeficiente angular -5/4 para obter a equação da reta s:

$$y - y1 = m(x - x1)$$
$$y - (-3) = (-5/4)(x - (-2))$$
$$y + 3 = (-5/4)(x + 2)$$
$$4y + 12 = -5x - 10$$
$$5x + 4y + 22 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta s é $5x + 4y + 22 = 0$.

13. (UFRGS) Dada a reta $(r) = 2x - y + 1 = 0$, a equação da reta paralela a r pelo ponto $P(1,1)$.

a) $2x - y = 0$ b) $2x - y + 2 = 0$ c) $2x + y + 1 = 0$ e d) $2x - y - 1 = 0$

A equação geral da reta r é 2x - y + 1 = 0, e o coeficiente angular é 2.

Agora, usando o ponto P(1, 1), temos:

$$y - y1 = m(x - x1)$$
$$y - 1 = 2(x - 1)$$
$$y - 1 = 2x - 2$$
$$2x - y + 1 = 0$$

Portanto, a equação da reta paralela à reta r e que passa pelo ponto $P(1,1)$ é $d)$ $2x - y - 1 = 0$.

14. Classifica as retas r e s conforme as suas posições relativas:

a) $x - 5y + 3 = 0$ e $5x + y - 1 = 0$

b) $5x + 2y + 1 = 0$ e $2x + 5y + 4 = 0$

$$A\ reta\ r: x - 5y + 3 = 0\ e\ a\ reta\ s: 5x + y - 1 = 0\ são\ concorrentes\ ou\ oblíquas.$$

$$A\ reta\ r: 5x + 2y + 1 = 0\ e\ a\ reta\ s: 2x + 5y + 4 = 0\ são\ perpendiculares.$$

15. Determine as coordenadas de um ponto P comum as retas r e s, cujas equações são x + 3y + 4 = 0 e 2x - 5y - 2 = 0, respectivamente.

As equações das retas r e s são:

$$r: x + 3y + 4 = 0$$

$$s: 2x - 5y - 2 = 0$$

Podemos resolver o sistema utilizando o método da substituição ou o método da adição/eliminação.

Vamos utilizar o método da substituição:

Passo 1: Isolando x na equação da reta r:

$$x = -3y - 4$$

Passo 2: Substituindo o valor de x na equação da reta s:

$$2(-3y - 4) - 5y - 2 = 0$$

$$-6y - 8 - 5y - 2 = 0$$

$$-11y - 10 = 0$$

$$-11y = 10$$

$$y = -10/11$$

Passo 3: Substituindo o valor de y na equação de x:

$$x = -3(-10/11) - 4$$

$$x = 30/11 - 44/11$$

$$x = -14/11$$

Portanto, o ponto P comum às retas r e s tem as coordenadas (x, y) = (-14/11, -10/11).

16. Determine a posição relativa das retas r: 3x - y -10 = 0 e s: 2x + 5y - 1 = 0.

Para determinar a posição relativa das retas $r: 3x - y - 10 = 0\ e\ s: 2x + 5y - 1 = 0$, podemos comparar seus coeficientes angulares.

A equação geral da reta r é $3x - y - 10 = 0$.

A equação geral da reta s é $2x + 5y - 1 = 0$

Vamos reescrever as equações na forma y = mx + b, onde m é o coeficiente angular:

Para a reta r:

$$-y = -3x + 10$$

$$y = 3x - 10$$

Para a reta s:

$$5y = -2x + 1$$

$$y = (-2/5)x + 1/5$$

Comparando os coeficientes angulares, temos:

O coeficiente angular da reta r é 3.

O coeficiente angular da reta s é -2/5.

Como os coeficientes angulares são diferentes, as retas r e s não são paralelas.

Agora, para determinar a posição relativa das retas, podemos comparar seus coeficientes angulares inversos. Se forem iguais, as retas são perpendiculares.

O coeficiente angular inverso da reta r é 1/3.

O coeficiente angular inverso da reta s é -5/2.

Como os coeficientes angulares inversos são diferentes, as retas r e s não são perpendiculares.

Portanto, as retas $r: 3x - y - 10 = 0 \; e \; s: 2x + 5y - 1 = 0$ são simplesmente concorrentes ou oblíquas, ou seja, elas se cruzam em um único ponto de coordenadas específicas.

1.2. Relatório Encontro 4

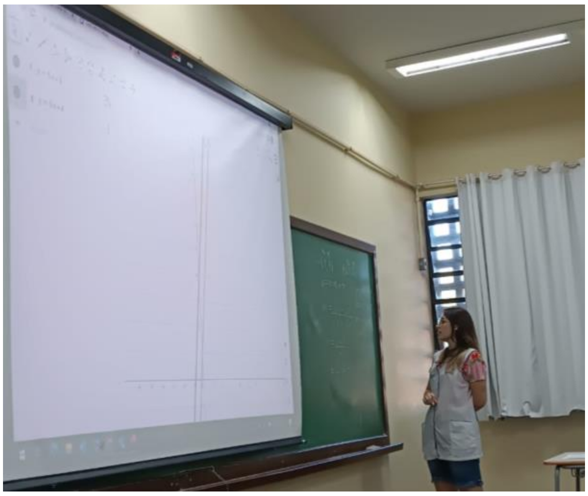
Relatório PROMAT

4° Encontro – 01/04/2023

No dia primeiro de abril de 2023, às 8h da manhã, demos início ao quarto encontro do PROMAT, com 17 alunos presentes. Iniciamos a aula relembrando as condições de alinhamento de três pontos para explicar a equação geral da reta. Relembramos o cálculo de determinante, pois percebemos que os alunos apresentavam dúvidas constantes. A reforma no prédio causou alguns ruídos que dificultou a explicação no início da aula. Após a explicação solicitamos que os alunos resolvessem um exemplo do plano de aula. Buscamos sanar os questionamentos passando entres os grupos. O cálculo do determinante causou bastante dúvidas entre os alunos, o que nos levou a contatar percebemos que eles tinham muita a dificuldade em manipular matrizes.

Após solicitamos que resolvessem o exemplo dois do plano de aula, e logo em seguida o corrigimos no quadro. Na sequência abordamos o conteúdo de equação reduzida da reta. Utilizamos o *GeoGebra* como ferramenta para explicar os coeficientes linear e angular da reta. Como ilustração manipulamos a reta $y = 5x + 1$ explorando os respectivos coeficientes.

Figura 18 - Explicação de exemplos



Fonte 7 - Acervo das autoras

Na sequência solicitamos que resolvessem o exemplo três do plano de aula. Deixamos um tempo disponível para a solução e o corrigimos em seguida no quadro junto com os alunos. A maioria dos alunos participaram ativamente da correção, sempre respondendo quando perguntávamos, no entanto, alguns ficaram dispersos a aula, com conversas paralelas e indiferentes às atividades que estavam sendo desenvolvidas no quadro.

Após o intervalo, solicitamos que se agrupassem em duplas e explicamos o jogo, que consistia em determinar os coeficientes lineares e angulares das equações dadas e depois marcar no tabuleiro os coeficientes encontrados. Deixamos tempo disponível para que jogassem e só então retomamos os *slides.*

Explicamos sobre posições relativas entre retas, e em seguida disponibilizamos mais um exercício para que determinassem as posições relativas de quatro retas. Circulamos entre os grupos ouvindo e sanando as possíveis dúvidas que tivessem.

Entregamos a lista de exercícios e utilizamos o restante do tempo para a solução dela. Corrigimos até a questão três e liberamos os alunos às 11h40min.

8. Encontro 5

8.1. Plano de Aula Encontro 5

Plano de Aula 5

15/04/2023

Conteúdo

Equação geral e reduzida da circunferência; Posições relativas envolvendo ponto, circunferência e reta.

Público-alvo

Alunos inscritos no projeto de ensino Promat.

Objetivo geral

Compreender os conceitos de equação geral e reduzida da circunferência.

Objetivos específicos

Ao se trabalhar com o conteúdo de equações da circunferência, espera-se que o aluno seja capaz de:

- Relembrar, do ensino fundamental II, a circunferência e seus elementos principais;
- Compreender a origem da equação reduzida da circunferência;
- Conhecer e praticar aplicações da equação reduzida da circunferência.

Tempo de execução

3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos

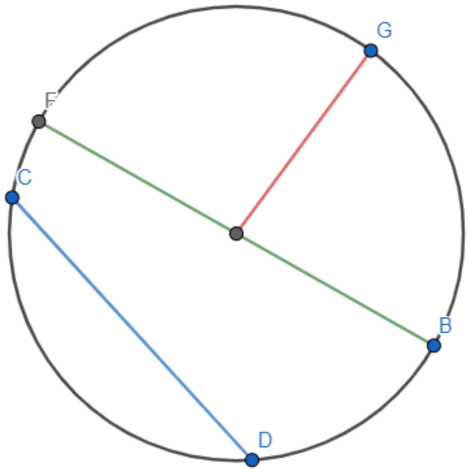
Lâminas, quadro, giz, material impresso.

Encaminhamento metodológico

1- Iniciaremos o encontro perguntando se ficou alguma dúvida a respeito do encontro anterior e relembrando o assunto abordado. Logo em seguida, iniciaremos a projeção dos *slides* para relembrar alguns elementos da circunferência. ***(5 min)***

Atividade 1: Observe a imagem a seguir.

Figura 19 - Circunferência



Fonte 8 - Acervo das autoras

Qual forma geométrica é? Como é chamado o ponto A? Como chamamos os seguimentos $\overline{BF}$? E o segmento $\overline{AG}$? E o segmento $\overline{AD}$?

2- Apresentaremos as definições formais dos elementos da circunferência.

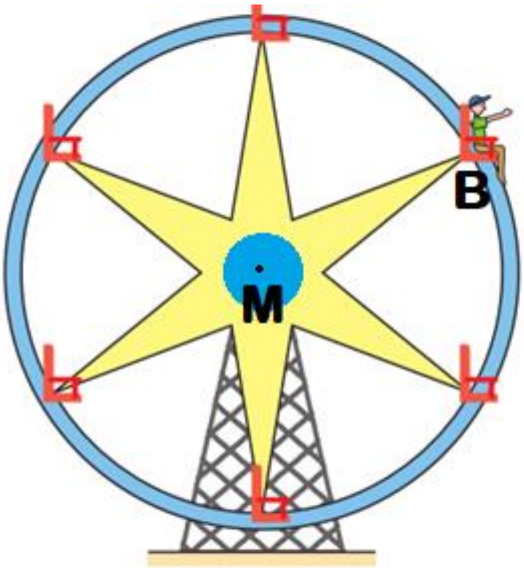
A circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizados a uma mesma distância r de um ponto fixo denominado o centro da circunferência $(ponto\ A)$. **Raio** de uma circunferência é um segmento de reta com uma extremidade no centro da circunferência e a outra extremidade num ponto qualquer da circunferência. **Corda** de uma circunferência é um segmento de reta cujas extremidades pertencem à circunferência. **Diâmetro** de uma circunferência é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Observamos que o diâmetro é a maior corda da circunferência.

(5 min)

3- Para introduzir a equação geral da circunferência apresentaremos o problema a seguir.

Problema 1: (Adaptado- ABREU; TOIGO; DAVELA; VOZNIEK) Josué foi ao parque de diversões para brincar na Roda Gigante, conforme ilustra a Figura 2:

Figura 20 - Problema 1



Fonte 9 - Adaptado UFRJ (2019)

Considere a imagem do brinquedo como a representação de uma circunferência. Sabendo que Josué está localizado no ponto $B(x, y)$, que o centro da circunferência é o ponto $M(a, b)$ e que r é o raio da circunferência.

a) Determine a equação reduzida da circunferência.

Vamos relembrar a fórmula para determinar a distância entre dois pontos. Sabemos que $d_{A,B} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

Pensando agora nos pontos do problema proposto temos, que a $d_{A,B} = r$, assim segue que:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Elevando ambos os lados ao quadrado temos

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

b) Suponha que $r = 3$ e $C(-2,1)$, determine a equação reduzida dessa circunferência.

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 3^2$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2=9$$

(10 – 15 min)

Exercício: (Portal da Matemática – OBMEP) Em cada item abaixo, determine as equações reduzida das circunferências:

a) de centro (0, 0) e raio 1.

$(x-0)^2+(y-0)^2=1^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$

b) de centro (1, 2) e raio 3.

$(x-1)^2+(y-2)^2=9$

c) de centro (−1, 5) e raio 4.

$(x+1)^2+(y-5)^2=16$

(10-15min)

4- Na sequência abordaremos a equação geral da circunferência.

Sabemos que a equação reduzida da circunferência é: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ essa circunferência tem $C\ (a,b)$ e raio r. Assim para obter a equação geral, basta desenvolver os quadrados.

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow\ x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2=r^2 \Rightarrow x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2-r^2=0$

(5-10 min)

5- Solicitaremos que retomem o exercício anterior e determinem a equação geral das circunferências. Em seguida, pediremos que identifiquem o centro e o raio a partir de uma equação geral da circunferência dada.

Exercício: (Portal da Matemática – OBMEP) Determine o centro e o raio das circunferências a seguir.

$a)\ x^2+y^2-8x+4y+19=0$

$x^2-8x+y^2+4y=-19$

$x^2-2\cdot 4x+16+y^2-2\cdot 2y+4=-19+16+4$

$(x-4)^2+(y+2)^2=1$

$C\ (4,-2) e\ r=1$

$b)\; x^2 + y^2 - 10x + 2y - 10 = 0$

$x^2 - 10x + y^2 + 2y = 10$

$x^2 - 2 \cdot 5x + 25 + y^2 + 2 \cdot 1y + 1 = 10 + 25 + 1$

$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 36$

$C\;(5,-1) e\; r = 6$

$c)\; x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

$x^2 - 6x + y^2 = -5$

$x^2 - 2 \cdot 3x + 9 + y^2 = -5 + 9$

$(x-3)^2 + y^2 = 4$

$C\;(3,0) e\; r = 2$

(25-30 min)

6- Ainda sobre equação geral solicitaremos que resolvam o exercício abaixo.

(Portal da Matemática – OBMEP) Sabendo que o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 6x - 4y + k = 0$ mede 10 unidades de comprimento, qual o valor de k?

$x^2 + 6x + y^2 - 4y = -k$

$x^2 + 2 \cdot 3x + 9 + y^2 - 2 \cdot 2y + 4 = -k + 4 + 9$

Assim temos que $(x+3)^2 + (y-2)^2 = -k + 4 + 9$ como o raio é 10 temos que $r^2 = 100$ assim $100 = -k + 13 \Rightarrow k = -100 + 13 \Rightarrow k = -87$.

(10 min)

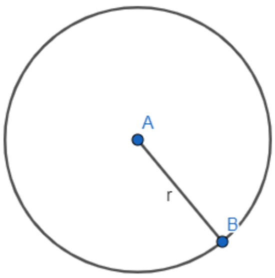
7- Entregaremos a lista de exercícios e solicitamos que resolvessem os exercícios. ***(15 min)***

8- Intervalo de 20 minutos.

9- Ao retornamos do intervalo explicamos o jogo proposto para esse encontro. O jogo funcionará com as regras do dominó com no máximo quatro jogadores, as peças serão compostas de um lado pela representação de uma circunferência e do outro lado a equação reduzida da circunferência, os alunos deverão relacionar corretamente a equação reduzida com a representação circunferência no plano cartesiano. **(20 -30 min)**

10-Após o tempo disponibilizado para o jogo, abordaremos sobre posições relativas entre circunferência e ponto.

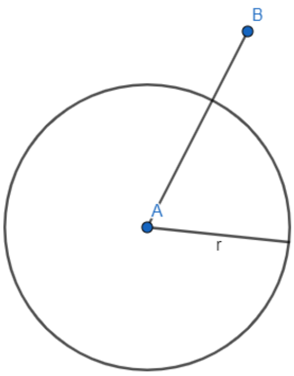
No plano cartesiano, um ponto $B(x_0, y_0)$ e uma circunferência $\gamma: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ tem três posições relativas possíveis.



Ponto pertence à circunferência:

Nesse caso o raio é igual a distância entre o centro e o ponto B da circunferência, $d_{A,B} = r$

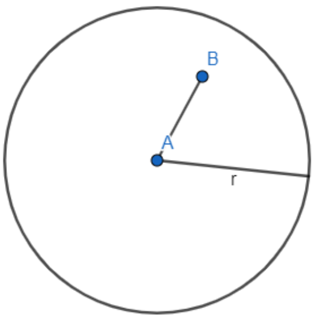
$$B \; pertence \; á \; \gamma \iff (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$$



Ponto externo à circunferência:

Nesse caso o raio é menor que a distância entre o centro e o ponto B da circunferência, $d_{A,B} > r$

$$B \; é \; externo \; á \; \gamma \iff (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2$$



Ponto interno à circunferência:

Nesse caso o raio é maior que a distância entre o centro e o ponto B da circunferência, $d_{A,B} < r$

$$B \; interno \; á \; \gamma \iff (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2$$

(5 min)

11-Em seguida solicitaremos que os alunos determinem a posição relativa entre o ponto P e a circunferência γ:

a)$P(1,3)\ e\ \gamma: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$

Temos que o centro de γ é A (-1,2), assim

$$d_{A,P} = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2}$$

$$d_{A,P} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2}$$

$$d_{A,P} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$$

$$d_{A,P} = \sqrt{4+1}$$

$$d_{A,P} = \sqrt{5} \cong 2{,}236$$

Como o raio de γ é $r = 4$, temos que $2{,}236 < 4$, assim P é interno a circunferência γ.

b) $P(5,6)\ e\ \gamma: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 4$

Temos que o centro de γ é A (3,6), assim basta verificar

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 =$$

$$(5-3)^2 + (6-6)^2 =$$

$$(2)^2 + (0)^2 = 4$$

Como o raio de γ é $r^2 = 4$, temos que $4 = 4$, assim P pertence a circunferência γ.

c)$P(3,1)\ e\ \gamma: (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$

Temos que o centro de γ é A (-1,3), assim basta verificar

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 =$$

$$(3+1)^2 + (1-3)^2 =$$

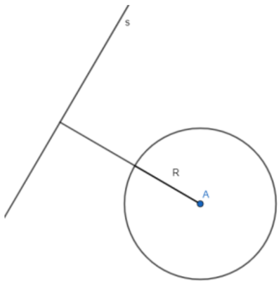
$$(4)^2 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20$$

Como o raio de γ é $r^2 = 25$, temos que $20 < 25$, assim P é interno a circunferência γ.

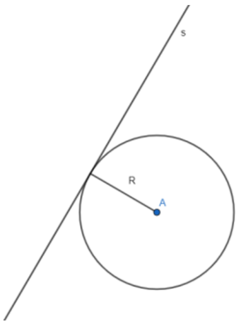
(10 min)

12-Na sequência abordaremos o conteúdo de posição relativa entre reta e circunferência.

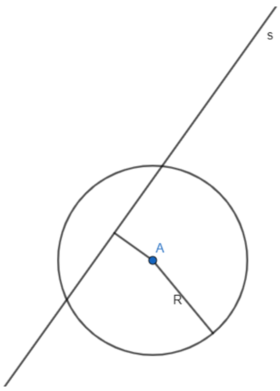
No plano cartesiano, temos três posições relativas possíveis entre uma reta s e uma circunferência γ:



s é exterior a γ se, e somente se: $d_{A,s} > R$



s é tangente a γ se, e somente se: $d_{A,s} = R$



s é secante a γ se, e somente se: $d_{A,s} < R$

(5 min)

13- Em seguida solicitaremos que os alunos determinem a posição relativa entre a reta s e a circunferência γ:

$a) s: 3x + 4y + 4 = 0 \; e \; \gamma: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

Temos que o centro de γ é A (1,2), assim

$$d_{A,s} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{A,s} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$d_{A,s} = \frac{|3 + 8 + 4|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$d_{A,s} = \frac{|15|}{\sqrt{25}}$$

$$d_{A,s} = \frac{15}{5} = 3$$

Assim, temos $d_{A,s} = 3$ e $r = 1$, como $3 > 1$ segue que a rets s é exterior a circunferência γ.

$b) s: 12x - 5y - 5 = 0 \; e \; \gamma: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

Temos que o centro de γ é A (3,1), assim

$$d_{A,s} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{A,s} = \frac{|12 \cdot 3 + (-5 \cdot 1) - 5|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}}$$

$$d_{A,s} = \frac{|36 - 5 - 5|}{\sqrt{144 + 25}}$$

$$d_{A,s} = \frac{|26|}{\sqrt{169}}$$

$$d_{A,s} = \frac{26}{13} = 2$$

Assim, temos $d_{A,s} = 2$ e $r = 2$, como $2 = 2$ segue que a rets s é tangente a circunferência γ.

$c) s: 4x + 2y + 6 = 0 \; e \; \gamma: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$

Temos que o centro de γ é A (3,2), assim

$$d_{A,s} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{A,s} = \frac{|4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 6|}{\sqrt{4^2 + 2^2}}$$

$$d_{A,s} = \frac{|12 + 4 + 6|}{\sqrt{16 + 4}}$$

$$d_{A,s} = \frac{|22|}{\sqrt{20}}$$

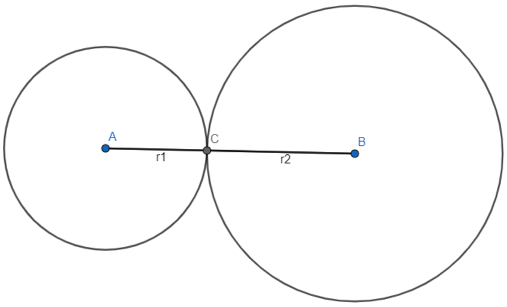
$$d_{A,s} = \frac{22}{\sqrt{20}} \cong 4{,}919$$

Assim, temos $d_{A,s} = 4{,}919$ e $r = 3$, como $4{,}919 > 3$ segue que a rets s é exterior a circunferência γ.

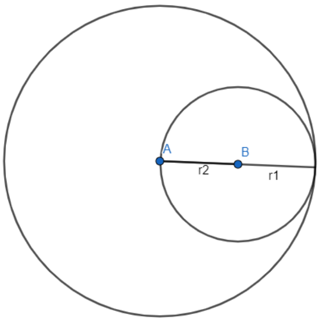
(10 – 15 min)

14-Por fim, seguiremos com o conteúdo de posição relativa entre duas circunferências.

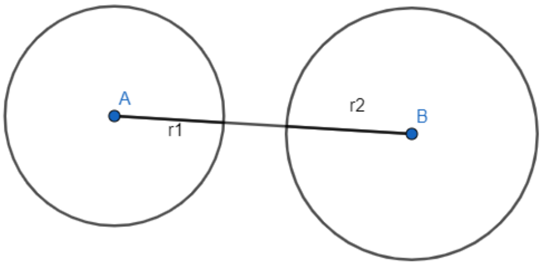
No plano cartesiano, temos três posições relativas possíveis entre uma circunferência β e uma circunferência γ:



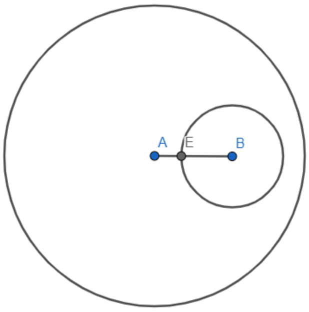
Duas circunferências são tangentes externas quando possuem somente um ponto em comum e uma é exterior à outra. A condição para que isso ocorra é $d_{A,B} = r1 + r2$



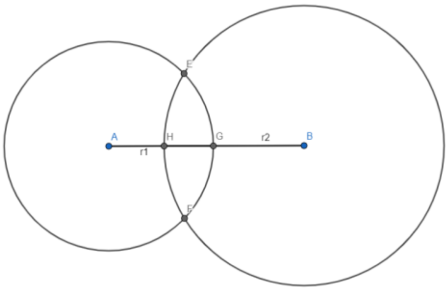
Duas circunferências são tangentes internas quando possuem apenas um ponto em comum e uma esteja no interior da outra. A condição para que isso ocorra é que $d_{A,B} = |r1 - r2|$



Duas circunferências são consideradas adjuntas exteriores quando não possuem nenhum ponto em comum. A condição para que isso ocorra é que $d_{A,B} > r1 + r2$



Duas circunferências são consideradas adjuntas interiores quando não possuem nenhum ponto em comum. A condição para que isso ocorra é que $d_{A,B} < |r1 - r2|$



Duas circunferências são consideradas secantes quando possuem dois pontos em comum. A condição para que isso ocorra é que $|r1 - r2| < d_{A,B} < r1 + r2$

(10 – 15 min)

15-Solicitaremos que determinem a posição relativa entre as seguintes circunferências.

$\alpha: x^2 + y^2 = 9$

$\beta: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

Temos que o centro de α é A (0,0) e o raio é $r2 = 3$. Para β temos que o centro é B (3,1) e o raio é $r1 = 2$.

Agora basta determinar a distância entre os centros.$d_{A,B} =$

$\sqrt{(x_B - x_{A)}{}^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \cong 3{,}162.$

Assim temos que $r1 + r2 = 5$, e $|r1 - r2| = 1$. Assim temos que $1 < 3{,}162 < 5$.

Portanto as circunferências são secantes.

(10 – 15 min)

16- O restante do encontro será destinado à resolução da lista de exercícios. **(50 min)**

Avaliação

A avalição será feita em todo momento da aula, os seguintes pontos são considerados: participação nas atividades e nas correções dos problemas, comunicação do aluno com os demais colegas e pôr fim a resolução dos exercícios propostos.

Referências

ASSIS, Cleber e MIRANDA, Tiago. Circunferência. Portal da Matemática. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/olfdwh9x5e88s.pdf Aceso em: 05 abr. 2023.

Exercícios sobre equação normal da reta. Brasil Escola. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-equacao-normal-circunferencia.htm#resp-3 Acesso em: 05 abr . 2023.

RIGONATTO, Marcelo. Posição Relativa entre duas circunferências. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/posicao-relativa-entre-duas-circunferencias.htm Acesso em: 05 abr. 2023.

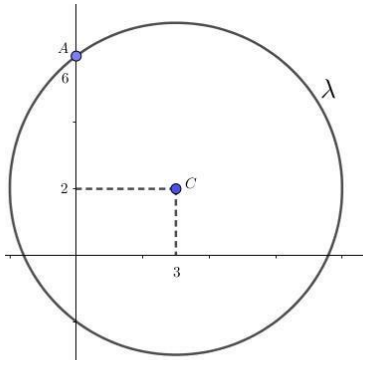
PAIVA, Manoel. Matemática Volume Único. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2005.

Anexo 1

5° Encontro

Conteúdo: Equação da Circunferência **Data:** 15/04/2023

1- O gráfico a seguir mostra uma circunferência λ que passa pelo ponto A e tem centro C:



a) Determine o raio de λ.

$A = (0,6)\ e\ C = (3,2)$

$d_{C,A} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

$d_{C,A} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-6)^2}$

$d_{C,A} = \sqrt{9+16}$

$d_{C,A} = \sqrt{25}$

$d_{C,A} = 5$

b) Obtenha a equação reduzida de λ.

$(x-3)^2+(y-2)^2=25$

2- Determine a equação da circunferência que possui centro em C(3, 6) e raio 4.

A equação da circunferência de centro C(a, b) e raio r, com r > 0, é
$(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$.
Portanto:
A equação da circunferência com coordenados do centro (3, 6) e raio medindo 4 é dada por:

$(x – 3)^2 + (x – 6)^2 = 16$

3- O centro de uma circunferência é determinado pelo ponto médio do segmento PQ, sendo P(4, 6) e Q(2, 10). Considerando que o raio dessa circunferência é 7, determine sua equação.

$$O\ centro\ da\ circunferência\ será\ dado\ por:$$
$$\left(\frac{X_p+X_q}{2},\frac{Y_p+Y_q}{2}\right)\rightarrow\left(\frac{4+2}{2},\frac{6+10}{2}\right)\rightarrow\left(\frac{6}{2},\frac{16}{2}\right)\rightarrow(3,8)$$
$$Temos\ que, a=3\ e\ b=8$$
$$A\ equação\ da\ circunferência\ de\ raio\ 7\ e\ centro\ (3,8)\ será\ dado\ pela\ expressão:$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$(x-3)^2+(y-8)^2=7^2$$
$$(x-3)^2+(y-8)^2=49$$

4- (PUC-SP) O ponto P(3, b) pertence à circunferência de centro no ponto C(0, 3) e raio 5. Calcule valor da coordenada b.

Temos por $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$, que a circunferência de centro C(0 ,3) e raio 5, possui como representação a equação
$(x – 0)^2 + (y – 3)^2 = 5^2$ ou $x^2 + (y – 3)^2 = 25$.
Considerando que o ponto P(3, b) pertença à circunferência, então:
$x^2 + (y – 3)^2 = 25$
$3^2 + (b – 3)^2 = 25$
$9 + (b – 3)^2 = 25$
$(b – 3)^2 = 25 – 9$
$(b – 3)^2 = 16$
$b – 3 = 4$ ou $b – 3 = – 4$
$b = 4 + 3$ ou $b = –4 + 3$
$b = 7$ ou $b = –1$
A coordenada b pode assumir os valores 7 ou –1.

5- (FEI-SP) Determine a equação da circunferência com centro no ponto C(2, 1) e que passa pelo ponto A(1, 1).

$$A = (1,1)\ e\ C = (2,1)$$
$$d_{C,A} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$
$$d_{C,A} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2}$$
$$d_{C,A} = \sqrt{1+0}$$
$$d_{C,A} = \sqrt{1}$$
$$d_{C,A} = 1$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

6- Obtenha o centro e o raio da circunferência cuja equação é:

a) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$

$$C = (3,1)\ \ e\ r = 5$$

b) $(x + 5)^2 + y^2 = 3$

$$C = (-5,0)\ \ e\ r = \sqrt{3} \cong 1{,}7$$

7- Obtenha o centro e o raio da circunferência em cada caso:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

$$x^2 - 2.1x + 1 + y^2 + 2.2y + 4 = 4 + 1 + 4$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$
$$C\ (1,-2) e\ r = 3$$

b) $x^2 + y^2 + 6x + 6 = 0$

$$x^2 - 2.3x + 9 + y^2 + 2.0.y = -6 + 9$$
$$(x-3)^2 + y^2 = 3$$
$$C\ (-3,0) e\ r = \sqrt{3}$$

c) $4x^2 + 4y^2 - 24x - 8y = 0$

$$(2x)^2 - 2.2x.6 + 36 + (2y)^2 - 2.2y.2 + 4 = 36 + 4$$
$$(2x-6)^2 + (2y+2)^2 = 40$$
$$C\ (3,1)\ e\ r = 2\sqrt{10}$$

d) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$

$$x^2 - 2.1x + 1 + y^2 - 2.4y + 16 = -8 + 1 + 16$$
$$(x-1)^2 + (y+16)^2 = 9$$
$$C\ (1,-16) e\ r = 3$$

e) $x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$

$$x^2 - 2.0.x + y^2 - 2.3.y + 9 = -4 + 9$$
$$x^2 + (y-3)^2 = 5$$

$$C\ (0,3) e\ r = \sqrt{5}$$

8- Considere o ponto $P(7,9)$ e a circunferência de equação λ: $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$.

a) Mostre que P pertence a λ.

$$(7-3)^2 + (9-6)^2 = 25$$
$$4^2 + 3^2 = 25$$
$$16 + 9 = 25$$
$$25 = 25, logo\ pertence\ à\ circunferência$$

b) Obtenha o centro C da circunferência. $C = (3,6)$

c) Lembrando que a reta t, tangente à circunferência λ no ponto P, é perpendicular ao raio CP, obtenha uma equação da reta t.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-9}{3-7} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$
$$y = mx + n\ \rightarrow y = \frac{3}{4}m + n$$
Digite a equação aqui.

9- Qual é a posição do ponto P em relação à circunferência λ, em cada caso?

a) P(1,2) e λ: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$

$$(1-2)^2 + (2-2)^2 = 5$$
$$(-1)^2 + 0^2 = 5$$
$$1 \neq 5, logo\ o\ ponto\ não\ pertence\ à\ circunferêcia, está\ dentro\ dela$$

b) $P(1,5)$ e λ: $x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$

$$x^2 - 2.4.x + 16 + y^2 - 2.0.y = -6 + 16$$
$$(x-4)^2 + y^2 = 10$$
$$(1-4)^2 + 5^2 = 10$$
$$(-3)^2 + 25 = 10$$
$$34 \neq 10, logo\ o\ ponto\ não\ pertence\ à\ circunferêcia, está\ fora\ dela$$

c) $P(4,-2)$ e λ: $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 24 = 0$

$$x^2 - 2.1.x + 1 + y^2 - 2.3.y + 9 = 24 + 1 + 9$$
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 34$$
$$(4-1)^2 + (-2-3)^2 = 34$$
$$(3)^2 + (-5)^2 = 34$$
$$34 = 34, logo\ o\ ponto\ pertence\ à\ circunferêcia$$

10- Os pontos (2, 3) e (-4, 1) pertencem à circunferência de centro (-2, 3) e raio 4?

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

$$(2+2)^2 + (3-3)^2 = 16$$
$$4^2 + 0 = 16$$
$$16 = 16, logo\ o\ ponto\ pertence\ à\ circunferêcia$$
$$(-4+2)^2 + (1-3)^2 = 16$$
$$(-2)^2 + (-2)^2 = 16$$
$$4 + 4 = 16$$
$$8 \neq 16, logo\ o\ ponto\ não\ pertence\ à\ circunferêcia, está\ dentro\ dela$$

11- Determine a equação reduzida e a equação geral de uma circunferência de centro (5, 3) e raio 2.

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 4$$

12- Determine a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R, nos seguintes casos:

a) $C(4,7)$ e $R = 8$

$(x-4)^2 + (y-7)^2 = 64$

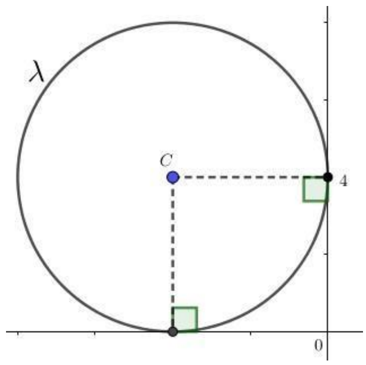
b) $C(0,2)$ e $R = \sqrt{7}$

$x^2 + (y-2)^2 = 7$

c) $C(0,0)$ e $R = 5$

$x^2 + y^2 = 25$

13- O gráfico seguinte mostra uma circunferência λ de centro C e tangente aos eixos coordenados:



a) Determine o raio de λ. $r = 4$

b) Obtenha a equação reduzida de λ.

$C\ (-4, 4) \quad (x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$

Anexo 2

8.2. Relatório Encontro 5

Relatório PROMAT

5° Encontro – 15/04/2023

No dia quinze de março, às 8h da manhã demos início ao terceiro encontro PROMAT, com 17 alunos presentes. Iniciamos a aula retomando o conceito de elementos da circunferência sendo eles, a definição de circunferência, raio, corda e diâmetro. Dando sequência na fórmula reduzida da circunferência deduzida a partir da distância entre dois pontos. Foi dado exemplos e exercícios.

Em seguida definimos a equação geral da circunferência e deixemos um momento para os alunos tentarem resolver alguns exercícios, depois solicitemos para que fossem ao quadro resolver. O problema três, proposto nessa etapa foi retirado da Obmep, tendo um grau maior de dificuldade, para que os alunos pensem mais e desenvolvam seu raciocínio. Eles tiveram um pouco de dificuldade em resolver, então fizemos a resolução juntamente ao quadro.

Figura 21 - Explicação das definições

Fonte 10 - Acervo das autoras

Na volta do intervalo foi feito um jogo de dominó, em um lado há uma circunferência e no outro lado há a equação geral da circunferência. De começo os alunos já falaram que não iriam conseguir resolver, então fizemos um exemplo mostrando no *GeoGebra* como funcionaria, depois de um tempo pegaram o jeito de jogar, mas o feedback foi de que acharam complicado.

No quarto momento foi destinado para as posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e entre duas circunferências. Após a explicação do conceito e de exemplos o restante da aula foi destinado para a realização de exercícios.

Em todo momento estávamos a disposição para possíveis dúvidas, a maioria nos relatou nunca ter vista esse conteúdo na escola, acreditamos que por se tratar de um conteúdo vista no último trimestre do ensino médio, muitos ainda não chegaram lá.

9. Encontro 6

9.1. Plano de Aula Encontro 6

Plano de Aula 6

29/04/2023

Conteúdo

Trigonometria: Seno, Cosseno, Tangente no triângulo retângulo e ângulos notáveis.

Público-alvo

Alunos inscritos no projeto de ensino Promat.

Objetivo geral

Compreender as Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo.

Objetivos específicos

Ao se trabalhar com Seno, Cosseno e Tangente no triângulo retângulo, espera-se que o aluno seja capaz de:

- Interpretar situações que envolvam o uso de relações trigonométricas;
- Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações;
- Identificar e usar corretamente as relações;
- Resolver situações problemas envolvendo as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Tempo de execução

3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos

Lâminas, quadro, giz, material impresso, projetor, caixa de som, computador e celular.

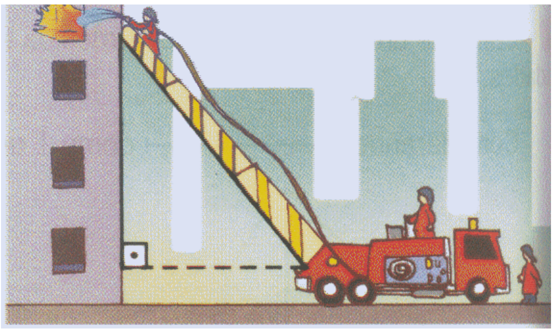
Encaminhamento metodológico

1- Iniciaremos a aula apresentando um vídeo disponível em https://www.youtube.com/watch?v=QYk9o3ntxFE ***(10 min)***
2- Na sequência, será proposto um problema com um objetivo de relembrar os conceitos de triângulo retângulo, utilizando o Teorema de Pitágoras. Os alunos realizarão o exercício e em seguida faremos a correção; ***(30 min)***

Problema...

Durante um incêndio num edifício de apartamentos, os bombeiros utilizaram uma escada Magirus de 10 m para atingir a janela do apartamento sinistrado. A escada estava colocada a 1 m do chão, sobre um caminhão que se encontrava afastado 6 m do edifício. Qual é a altura do apartamento sinistrado em relação ao chão?

Figura 22 - Exercício



Resolução:

Aplicando o Teorema de Pitágoras com as medidas do triângulo retângulo formado pelo caminhão e a distância do prédio e com o comprimento da escada temos:

$a^2 = b^2 + c^2$

$10^2 = x^2 + 6^2$

$x^2 = 100 - 36$

$x = \sqrt{64}$

$x = 8$

Como o caminhão de onde parte a escada está a um metro de altura do chão, é preciso somar:

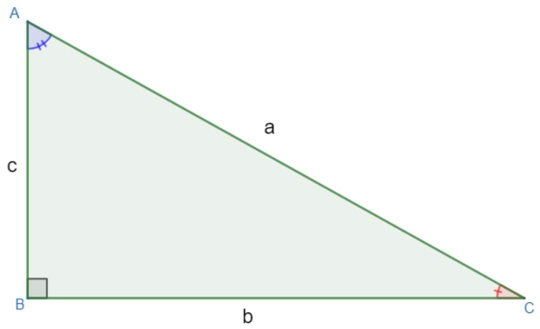
$8 + 1 = 9$

Logo a altura do apartamento sinistrado está a 9 metros do chão.

3- Após este momento relembraremos os conceitos e definições em triângulo retângulo introduzindo as razões trigonométricas; ***(30 min)***

O Triângulo Retângulo

Figura 23 - Triângulo Retângulo



a – Hipotenusa

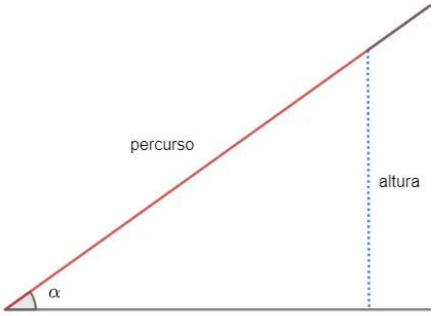
b – cateto oposto ao ângulo $\hat{A}$ e adjacente à $\hat{C}$

c – cateto adjacente ao ângulo $\hat{A}$ e oposto à $\hat{C}$

Seno

Antes de definir uma fórmula para o seno de um ângulo, vamos entender a ideia de seno. Imagine uma rampa, nela podemos determinar a razão entre a altura e o percurso, certo? Essa razão chamaremos de seno do ângulo α.

Figura 24 - Seno

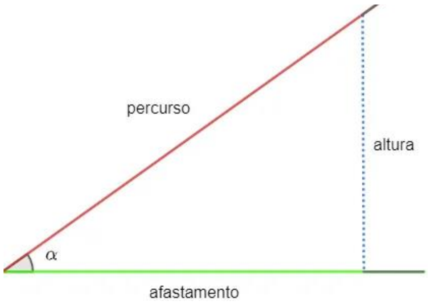


$$seno\ \alpha = \frac{altura}{percurso}$$

Cosseno

De maneira análoga à ideia do seno, temos o sentido do cosseno, entretanto, em uma rampa, o cosseno é a razão entre o afastamento em relação ao solo e o percurso na rampa.

Figura 25 - Cosseno

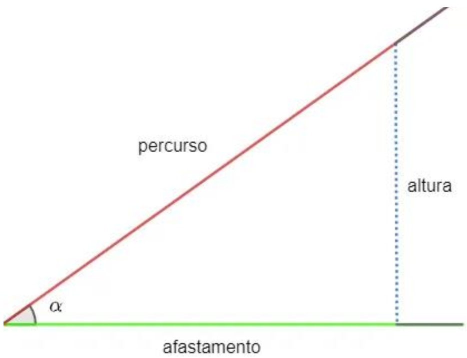


$$cosseno\ \ \alpha = \frac{afastamento}{percurso}$$

Tangente

Também de modo semelhante às ideias de seno e cosseno, a tangente é a razão entre a altura e o afastamento de uma rampa.

Figura 26 - Tangente

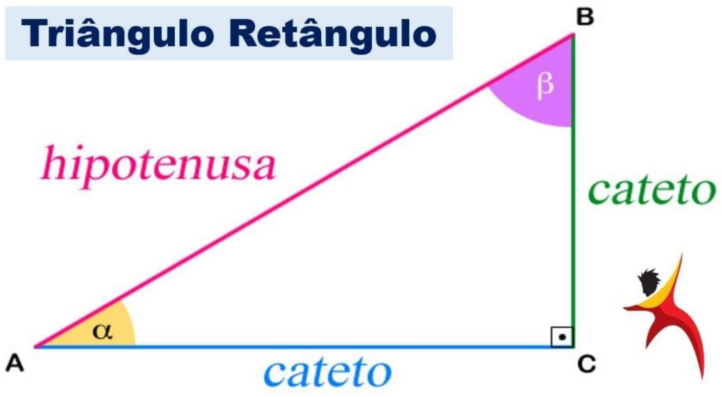


$$tangente\ \ \alpha = \frac{altura}{afastamento}$$

Relação entre seno, cosseno e tangente

De modo geral, podemos definir então seno, cosseno e tangente em um triangulo retângulo qualquer utilizando as ideias anteriores. Veja a seguir:

Figura 27 - Triângulo Retângulo



Fonte 11 - https://blogdoenem.com.br/triangulo-retangulo-matematica-enem/

Tomando primeiramente o ângulo α como referencial, temos:

$$sen\ \alpha = \frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$cos\ \alpha = \frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$tg\ \alpha = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente} = \frac{a}{b}$$

Tomando agora o ângulo β como referencial, temos:

$$sen\ \beta = \frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$cos\ \beta = \frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$tg\ \beta = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente} = \frac{b}{a}$$

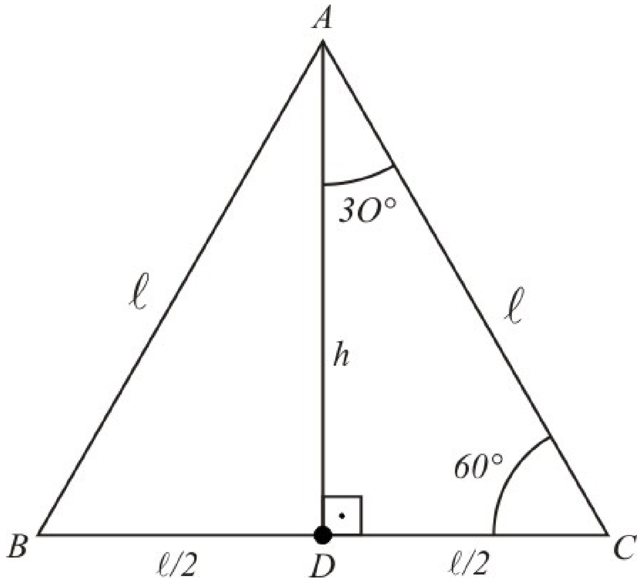
4- Em seguida, com o nosso auxílio, solicitaremos aos alunos que utilizando as razões apresentadas, construam a tabela dos ângulos notáveis de 30°, 45° e 60°. ***(40 min)***

Desafio...

Vamos descobrir os valores para os ângulos notáveis?

Para os ângulos de 30° e 60°, considere um triângulo ABC equilátero, cujos ângulos medem 60° e chamaremos os lados de l. Traçando a altura, obtemos dois triângulos congruentes com os ângulos de 30°, 60° e 90°

Figura 28 - Triângulo equilátero



Utilizando o Teorema de Pitágoras, determine o valor da altura ***(h)*** do triângulo:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Agora, para encontrar o valor de seno, cosseno e tangente de 30° e 60° basta utilizar as razões trigonométricas:

$$sen(\theta) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$sen(30°) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

$$sen(60°) = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos(\theta) = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$cos(30°) = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos(60°) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

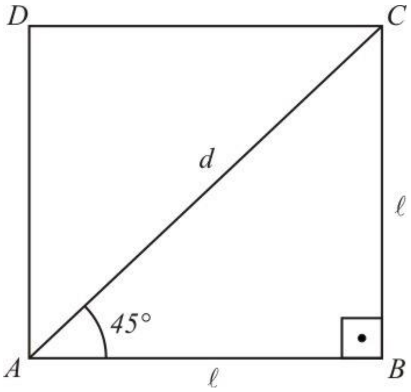
$$tan(\theta) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$tan(30°) = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tan(60°) = \frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{l} = \sqrt{3}$$

Para o ângulo de 45°, considere um quadrado ABCD de lado l. Traçando a diagonal ***d,*** obteremos dois triângulos congruentes com ângulos de 45° e 90°.

Figura 29 - Quadrado



Utilizando o Teorema de Pitágoras, determine o valor da diagonal ***(d)*** do triângulo:

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2$$

$$d = l\sqrt{2}$$

Agora, para encontrar o valor de seno, cosseno e tangente de 45° basta utilizar as razões trigonométricas:

$$sen(45°) = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos(45°) = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tan(45°) = \frac{l}{l} = 1$$

Agora, podemos montar a tabela:

	30°	**45°**	**60°**
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Intervalo (20min)

5- Após este momento apresentaremos o seguinte vídeo para os alunos; ***(10 min)***

https://www.youtube.com/watch?v=2Efe8kqCZEQ

6- Após o intervalo, faremos alguns exemplos de aplicações; ***(30 min)***

Exemplo 1

Um engenheiro foi contratado para calcular a altura de um prédio sem subir nele. A uma distância de 40 metros, constatou-se que era possível construir o seguinte triângulo retângulo:

Podemos afirmar que a altura do prédio é de, aproximadamente:

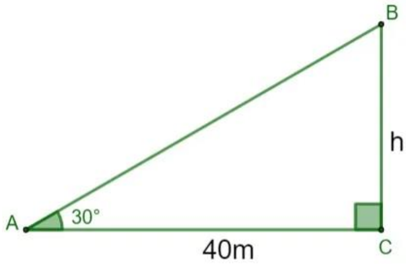
(Dados: use √3 = 1,7)

Figura 30 - Exemplo 1

Resolução:

Analisando a imagem, podemos construir o seguinte triângulo retângulo:

Figura 31 - Exemplo 1



Para encontrar o valor de h, que é cateto oposto ao ângulo de que conhecemos o valor, utilizaremos a tangente, pois queremos o cateto oposto e conhecemos o cateto adjacente. Consultando a tabela, é possível encontrar o valor da tangente, então temos que:

$$\tan 30° = \frac{co}{ca}$$

$$\tan 30° = \frac{h}{40}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{40}$$

$$3h = \sqrt{3}.40$$

$$3h = 1{,}7\ .40$$

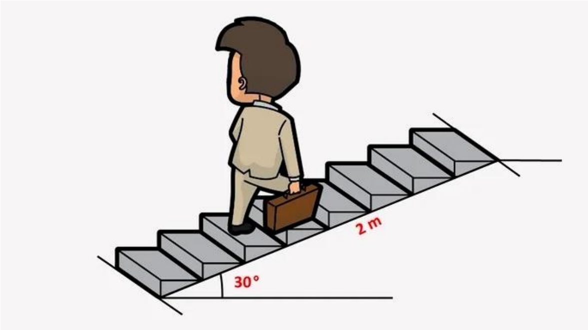
$$3h = 68$$

$$h \cong 22{,}7$$

Exemplo 2:

João trabalha em um prédio e todos os dias têm que subir uma escada de 8 degraus, que tem aproximadamente 2 metros de comprimento e 30 graus de inclinação. De acordo com a figura a seguir, determine a altura de cada degrau.

Figura 32 - Exemplo 2



Resolução:

Como a escada forma um triângulo retângulo, o primeiro passo para responder à questão é encontrar a altura da rampa, que corresponde ao cateto oposto.

$$sen\ 30° = \frac{co}{h}$$

$$sen\ 30° = \frac{h}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{2}$$

$$h = 1\ m$$

Se a altura da escada é de 1 m e ela possui 8 degraus, então dividindo a altura por 8 encontraremos a altura de cada degrau.

$$degrau = \frac{h}{8}$$

$$degrau = \frac{1m}{8}$$

$$degrau = 0{,}125\ m$$

Portanto, cada degrau apresenta a altura de 0,125 m ou 12,5 cm.

7- Jogo! Solicitaremos aos alunos para que peguem seus celulares e acessem o site https://kahoot.it/ e insiram o pin gerado pelas professoras no telão, para jogarem o jogo proposto. https://create.kahoot.it/course/5932b315-3f49-4617-

b120-479e6f1b8356#course=80bba39c-b880-49d9-b185-0a97cd9bf03a ***(20 min)***

8- Para finalizar a aula, solicitaremos aos alunos para que realizem os exercícios da lista, iremos intercalar resolução com correção. ***(40 min)***

Avaliação

A avalição será feita em todo momento da aula. Os seguintes pontos são considerados: participação nas atividades e nas correções dos problemas, comunicação do aluno com os demais colegas e por fim a resolução dos exercícios propostos.

Referências

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar:**

PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual do Paraná** (CREP): Matemática. Curitiba: SEED, 2019.

KILHIAN, Kleber. Demonstração dos Ângulos Notáveis. O Baricentro da Mente, 2010. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2010/05/demonstracao-dos-angulos-notaveis.html Acesso em: 23 de abril, 12h.

Triângulo Retângulo e suas relações trigonométricas. Blog do ENEM. Disponível em: https://blogdoenem.com.br/triangulo-retangulo-matematica-enem/ Acesso em: 23 de abril, 13h.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues. Exercícios sobre razões trigonométricas. Mundo Educação. Disponível em: https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-razoes-trigonometricas.htm Acesso em: 26 de abril, 19 h 30 min.

Trigonometria no Triângulo Retângulo. Kahoot!. Disponível em: https://create.kahoot.it/course/5932b315-3f49-4617-b120-479e6f1b8356#course=80bba39c-b880-49d9-b185-0a97cd9bf03a Acesso em: 26 de abril, 19 h 30 min.

PELLUSO, Rodrigo. Jingle Bells da Trigonometria. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=2Efe8kqCZEQ Acesso em: 23 de abril, 13h.

LOPES, José. Trigonometria no Triângulo Retângulo: História e Aplicação. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=QYk9o3ntxFE Acesso em: 26 de abril, 20h.

PAIVA, Manoel. Matemática Volume Único. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2005.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. Seno, Cosseno e Tangente no ENEM. UOL. Disponível em: https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/seno-cosseno-tangente-no-enem.htm Acesso em: 26 de abril, 21 h.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. Seno, cosseno e tangente no ENEM. Mundo Educação. Disponível em: https://vestibular.mundoeducacao.uol.com.br/enem/seno-cosseno-tangente-no-enem.htm Acesso em: 26 de abril, 21 h.

TADEU, Walter. Exercícios 2010. Professor Walter Tadeu. Disponível em: http://professorwaltertadeu.mat.br/exerciciosEM2010.html Acesso em: 26 de abril, 21 h.

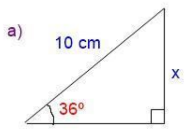
Anexo 1

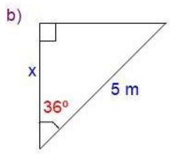
6° Encontro

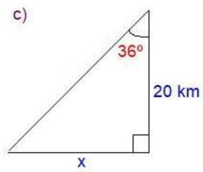
Conteúdo: Seno, Cosseno, Tangente no triângulo retângulo e ângulos notáveis

Data: 29/04/2023

1- Sabendo que sen36°=0,58, cos36°=0,80 e tg36°=0,72, calcular o valor de x em cada figura.





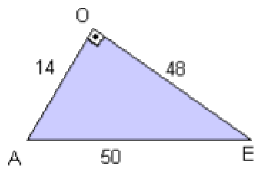


Resolução: a)$seno = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \Rightarrow sen36° = \frac{x}{10} \Rightarrow 0{,}58 = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 5{,}8\ m$

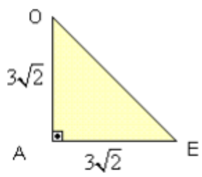
b)$cosseno = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} \Rightarrow cos36° = \frac{x}{5} \Rightarrow 0{,}80 = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 4\ m$

c)$tangente = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \Rightarrow tg36° = \frac{x}{20} \Rightarrow 0{,}72 = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 14{,}4\ km$

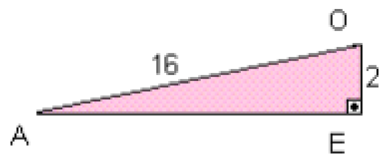
2- Nos triângulos das figuras abaixo, calcule tg Â, tg Ê, tg Ô:



a)



b) c)



Resolução: a) $tg\hat{A} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \Rightarrow tg\hat{A} = \frac{48}{14} \Rightarrow tg\hat{A} \cong 3{,}42$

$tg\hat{E} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \Rightarrow tg\hat{E} = \frac{14}{48} = tg\hat{E} \cong 0{,}29$

b) $tg\hat{O} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \Rightarrow tg\hat{O} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = tg\hat{O} = 1$

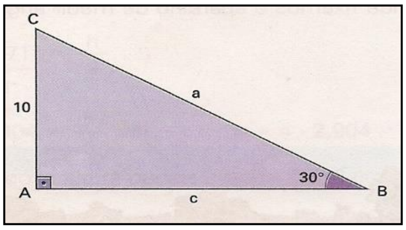
$tg\hat{E} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \Rightarrow tg\hat{E} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = tg\hat{O} = 1$

c) Primeiro precisamos determinar o outro cateto. Assim temos que $16^2 = 2^2 + x^2 \Rightarrow 256 = 4 + x^2 \Rightarrow 256 - 4 = x^2 \Rightarrow 252 = x^2 \Rightarrow \sqrt{252} \Rightarrow x = 6\sqrt{7}$

$tg\hat{O} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \Rightarrow tg\hat{O} = \frac{6\sqrt{7}}{2} = tg\hat{O} = 3\sqrt{7}$

$tg\hat{A} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \Rightarrow tg\hat{A} = \frac{2}{6\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{42} = \frac{\sqrt{7}}{21}$

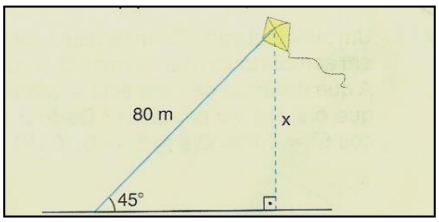
3- Determine no triângulo retângulo ABC as medidas **a** e **c** indicadas.



Resolução: $sen30° = \frac{10}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{a} \Rightarrow a = 20$

$cos30° = \frac{c}{20} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{20} \Rightarrow 2c = 20\sqrt{3} \Rightarrow c = 10\sqrt{3}$

4- Uma pipa é presa a um fio esticado que forma um ângulo de 45º com o solo. O comprimento do fio é 80 m. Determine a altura da pipa em relação ao solo. Dado $\sqrt{2}$ = 1,41. Observação: suponha que o fio fique reto, o que não ocorre na realidade.

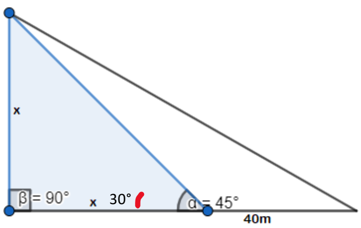


Resolução: $sen45° = \frac{x}{80} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{80} \Rightarrow 2x = 80\sqrt{2} \Rightarrow x = 40\sqrt{2} \cong 56{,}6\ m$

5- (VUNESP) Uma pessoa, no nível do solo, observa o ponto mais alto de uma torre vertical, à sua frente, sob o ângulo de 30º. Aproximando-se 40 metros da torre, ela passa a ver esse ponto sob o ângulo de 45º. A altura aproximada da torre, em metros, é: (considere $\sqrt{3} = 1{,}73$)

a) 44,7 b) 48,8 c) 54,6 d) 60,0
e) 65,3

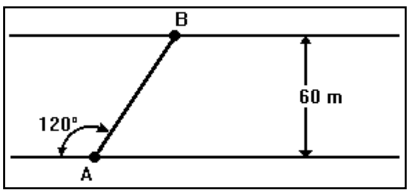
Resolução: para ajudar na resolução vamos representar através de



um desenho

Assim sabemos que $tg30° = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{(x+40)} \Rightarrow \sqrt{3}(x + 40) = 3x \Rightarrow x\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 3x \Rightarrow 40\sqrt{3} = 3x - x\sqrt{3} \Rightarrow 40\sqrt{3} = x(3 - \sqrt{3}) \Rightarrow \frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3} = x \Rightarrow \frac{(40\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})} = x \Rightarrow \frac{40\cdot 3+120\sqrt{3}}{9-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3} = x \Rightarrow x = \frac{120+120\sqrt{3}}{6} \Rightarrow x = 20 + 20\sqrt{3} \Rightarrow x = 20 + 20\cdot 1{,}73 = 20 + 34{,}6 = 54{,}6\ m$

6- (UFRS) Um barco parte de A para atravessar o rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio. Sendo a largura do rio 60 m, a distância, em metros, percorrida pelo barco foi de:

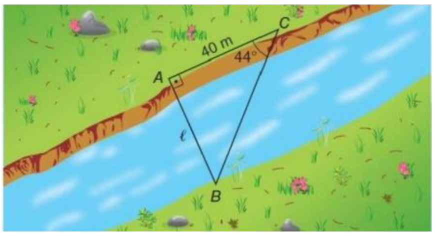


a) $40\sqrt{2}$ b) $40\sqrt{3}$ c) $45\sqrt{3}$
d) $50\sqrt{3}$ e) $60\sqrt{2}$

Resolução: sabemos que o suplementar de 120° é 60°, assim segue que:

$sen60° = \frac{60}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{x} \Rightarrow x\sqrt{3} = 120 \Rightarrow x = \frac{120\cdot(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3})} \Rightarrow x = \frac{120\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 40\sqrt{3}$

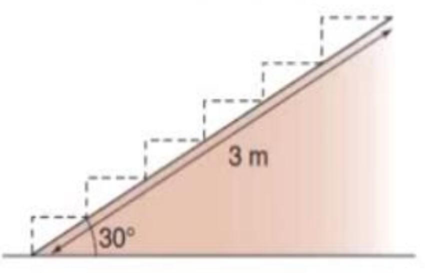
7- Um engenheiro deve medir a largura de um rio. Para isso, fixa um ponto A na margem em que está e um ponto B na margem oposta. A seguir, desloca-se 40 m perpendicularmente à reta $\overleftrightarrow{AB}$ até o ponto C e mede o ângulo $A\hat{C}B$, obtendo 44°. Dados: sen44°=0,69, cos44°=0,71 e tg44°=0,96, calcule a largura do rio.



Resolução: temos que $tangente = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$ assim segue que:

$tg44° = \frac{l}{40} \Rightarrow 0{,}96 = \frac{l}{40} \Rightarrow 38{,}4 = l$

8- (UFPI) Dois níveis de uma praça estão ligados por uma rampa de 3 m de comprimento e 30° de inclinação, conforme a figura abaixo.



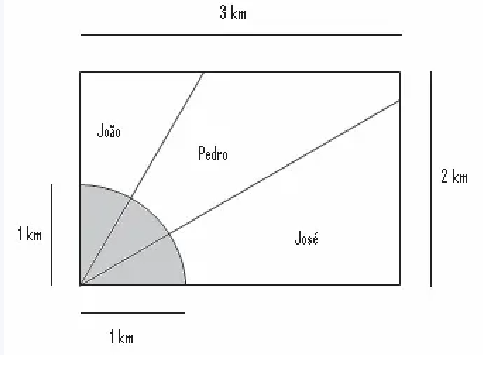
Devem-se construir sobre a rampa 6 degraus da mesma altura. A altura de cada degrau será:

a)0,20 m b)0,23 m c)0,25 m d)0,27 m

Resolução: vamos calcular inicialmente a altura total da escada. Sabemos que $seno = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$. Assim segue que:

$sen30° = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{3} \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1{,}5\ m$. Como temos 6 degraus segue que: $\frac{1{,}5}{6} = 0{,}25\ m$

9- (Enem de 2009) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como



herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

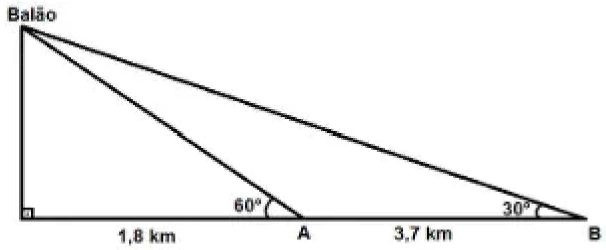
(Considere $\frac{\sqrt{3}}{3}$ = 0,58)

a) 50% b) 43% c) 37% d) 33% e) 19%

Resolução: sabemos que a área total de herança é de $2 \cdot 3 = 6\ km^2$. Para calcular a área que pertence a João precisamos determinara a altura do triângulo que representa sua parte, assim $tg30° = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = x \Rightarrow x = 1{,}16 \Rightarrow x = 1{,}16\ km$. Para calcular a área que pertence a João vamos determinar a área do triângulo:

$\frac{base \cdot altura}{2} = \frac{2 \cdot 1{,}16}{2} = 1{,}16\ km^2$. Para determinar a porcentagem temos $\frac{1{,}16}{6} \cdot 100 \cong 19\%$

10-Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou

sob um ângulo de 30°.
Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

a)1,8 km.
b)1,9 km.
c)3,1 km.
d)3,7 km.
e) 5,5 km.

Resolução: sabemos que $tangente = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$ assim segue que:

$tg60° = \frac{x}{1{,}8} \Rightarrow 1{,}73 \Rightarrow x \cong 3{,}11\ km$

9.2. Relatório Encontro 6

Relatório PROMAT

6° Encontro – 29/04/2023

No dia 29 de abril de 2023, às 8h, demos início ao sexto encontro do PROMAT, com 17 alunos presentes. Neste dia, no Campus de Cascavel da Unioeste, estavam ocorrendo os Jogos Internos da Unioeste Intercampi (INTER JIU) e as salas que usamos paras as aulas serviram como alojamento para os alunos. Com isso tivemos que realizar a aula em outra sala (Sala B101), como consequência muitos alunos chegaram um pouco atrasados.

Iniciamos a aula com um vídeo sobre trigonometria a fim de mostrar aos alunos um pouco da história da trigonometria. Em seguida passamos um problema envolvendo o Teorema de Pitágoras para inserir os conceitos de cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa.

Na sequência introduzimos os conceitos de seno, cosseno e tangente utilizando as ideias sobre o triângulo trabalhada no problema anterior. Após a compreensão desses conceitos buscamos descobrir os valores dos ângulos notáveis utilizando um triângulo equilátero.

Nesta etapa notamos que os alunos tiveram dificuldades em escrever a altura do triângulo em relação aos lados. Entretanto, com o auxílio da professora conseguiram compreender e descobrir o seno e cosseno dos ângulos notáveis.

Para tornar a aquisição do conhecimento mais lúdica passamos a música Jingle Bells da Trigonometria (Pelluso). Após o intervalo realizamos juntamente com os alunos alguns exemplos para fixar o conteúdo.

Ao corrigir os exemplos notamos que os alunos têm muita dificuldade em identificar qual relação de seno, cosseno ou tangente usar para achar a solução. Porém acreditamos que com o jogo Kahoot essas dúvidas foram sanadas.

Tivemos problemas com a internet durante a realização do jogo, mas apesar disso foi muito bem aceito pelos alunos.

Em seguida, deixamos os alunos resolverem a lista e circulamos pela sala auxiliando na resolução. Para finalizar a aula corrigiremos alguns exercícios da lista.

10. Encontro 7

10.1. Plano de Aula Encontro 7

Plano de Aula 7

06/05/2023

Conteúdo

Trigonometria: Radianos, ciclo trigonométrico e as extensões dos conceitos de seno e cosseno.

Público-alvo

Alunos inscritos no projeto de ensino Promat.

Objetivo geral

Compreender os conceitos de trigonometria no ciclo trigonométrico e resolver problemas que o envolvam.

Objetivos específicos

Ao se trabalhar com ciclo trigonométrico, espera-se que os alunos sejam capazes de:

- Compreender o que são ângulos, arcos e medidas de ângulo em grau e radiano;
- Converter radianos em graus e graus para radianos;
- Identificar e analisar as razões trigonométricas no ciclo trigonométrico;

Tempo de execução

3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos

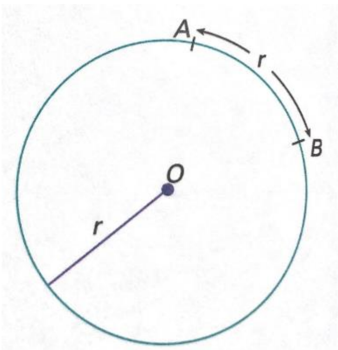
Lâminas, quadro, giz, material impresso, projetor, dados.

Encaminhamento metodológico

1- Daremos início à aula questionando os alunos sobre seus conhecimentos prévios sobre ângulos com intuito de direcionar a dinâmica ao conhecimento do que é um radiano. Em seguida apresentaremos as definições e explicaremos como fazer as conversões de graus para radiano e de radiano para graus, apresentando alguns exemplos; ***(60 min)***

O Radiano, unidade de medida de arco e de ângulo

Figura 33 - Arco de uma circunferência



Considere um arco $\widehat{AB}$, contido numa circunferência de raio r, tal que o comprimento do arco $\widehat{AB}$ seja igual a r.

Dizemos que a medida do arco $\widehat{AB}$ é 1 radiano $(1\, rad)$.

Definição

Um radiano (1 rad) é um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.

Um ângulo $A\hat{O}B$ mede $1\, rad$ se, e somente se, determina uma circunferência de centro O um arco de $1\, rad$.

Figura 34 - Definição de Radiano

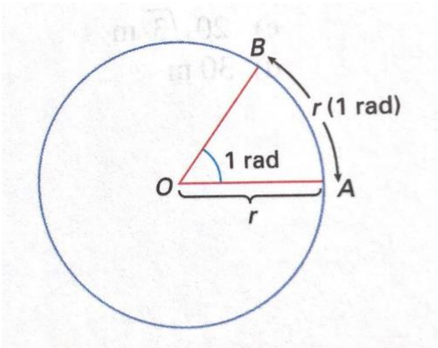
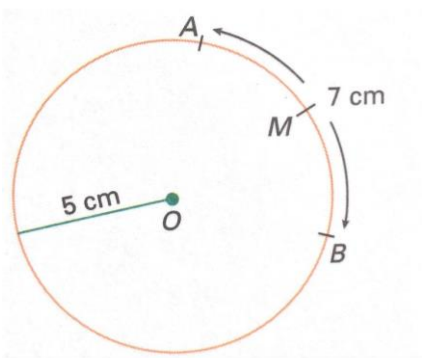


Figura 35 - Exemplo 1



Exemplo 1

A medida x, em radianos, do arco $\widehat{AMB}$ da circunferência ao lado é calculada por uma regra de três:

$$1\,rad \;\; ----\,5\,cm$$

$$x \;\; ----- \;\; 7\,cm$$

$$x = \frac{7}{5}\,rad = 1{,}4\;\; rad$$

A Medida da circunferência em radianos

Sabemos que a medida de uma circunferência mede 360°, qual será sua medida em radianos?

Considere uma circunferência de raio r. Como sabemos que o comprimento de uma circunferência é dado por $2\pi\, r$, podemos obter a sua medida x, em radianos, por meio de uma regra de três:

$$1\,rad \;\; ----- \;\; r$$

$$x \;\; ----- \;\; 2\pi\, r$$

Logo: $x = \frac{2\pi r}{r} rad = 2\pi\, rad$

Assim,

A medida de uma circunferência é $2\pi\, rad$.

Transformações de unidades

Como sabemos que uma volta completa é equivalente a 360°, podemos afirmar que $2\pi\, rad = 360°$, então:

$$\pi\, rad \text{ é } equivalente\ a\ 180°$$

Agora que sabemos que $\pi = 180°$ vamos calcular alguns exemplos.

Exemplo 2

Determine em radianos quanto vale:

a) 120°

$180° \ --- \ \pi$

$120° \ --- \ x$

$180x = 120\,\pi$

$x = \dfrac{120\,\pi}{180} = \dfrac{2\,\pi}{3}$

b) 270°

$180° \ --- \ \pi$

$270° \ --- \ x$

$180x = 270\,\pi$

$x = \dfrac{270\,\pi}{180} = \dfrac{3\,\pi}{2}$

Exemplo 3

Determine qual a medida em graus de:

a) $\frac{\pi}{6}\, rad$

$\dfrac{180}{6} = 30°$

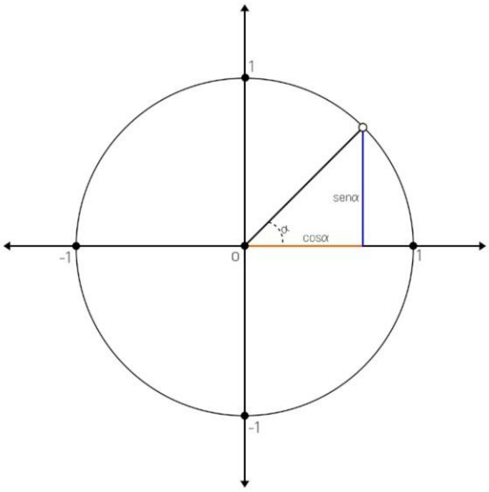
b) $\frac{5\pi}{6}\, rad$

$\dfrac{5\,.\,180}{6} = 150°$

A Circunferência Trigonométrica

Considere uma circunferência de raio unitário $r = 1$, cujo centro coincida com a origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonal. (A rigor as figuras que seguem estão erradas. O eixo x tem seta para a direita apenas e o exio y para cima. A setas servem para orientar os eixos. Mas pode deixar assim mesmo)

Figura 36 Circunferência

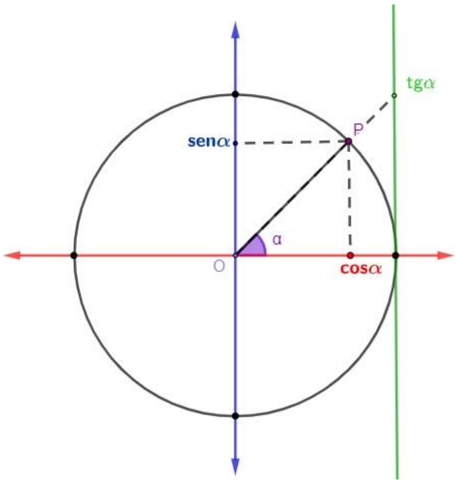


Fonte 12 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm

Nele o eixo horizontal é o eixo dos cossenos e o eixo vertical é o eixo dos senos. Pode ser chamado também de ciclo trigonométrico.

Utilizamos o círculo para encontrar o valor do seno, do cosseno e da tangente, de acordo com o valor do ângulo. Tendo no eixo vertical o valor do seno e no eixo horizontal o valor do cosseno, ao determinar um ângulo no círculo trigonométrico, é possível encontrar o valor do seno e do cosseno analisando as coordenadas do ponto em que o segmento de reta liga o centro do círculo e a circunferência, representado por P na imagem a seguir. Se traçarmos a reta tangente ao círculo no ponto (1,0), poderemos também calcular a tangente desse ângulo de forma analítica conforme a imagem:

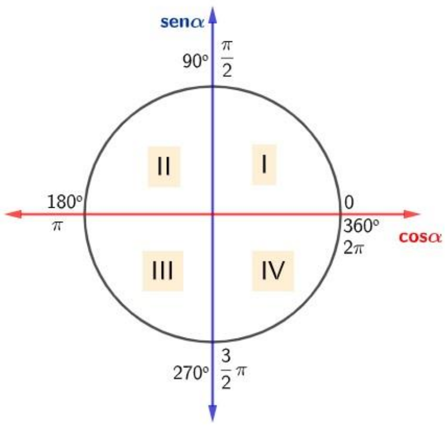
Figura 37 Circunferência



Fonte 13 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm

Quadrantes da circunferência Trigonométrica

Figura 38 Quadrantes

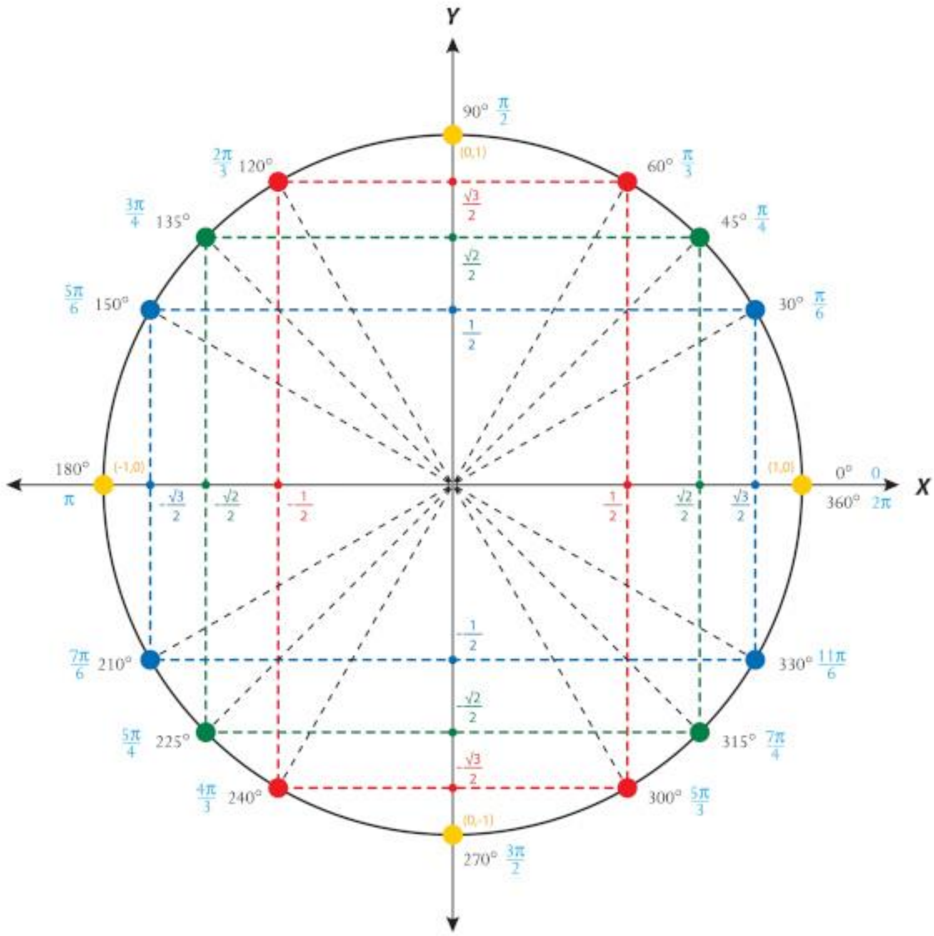


Fonte 14 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm

- **primeiro quadrante:** ângulos que estão entre 0 a 90º ou 0 e π/2 radianos;
- **segundo quadrante:** ângulos que estão entre 90º e 180º ou π/2 e π radianos;
- **terceiro quadrante:** ângulos que estão entre 180º e 270º ou π e 3 π/2 radianos;
- **quarto quadrante:** ângulos que estão entre 270º e 360º ou 3π/2 e 2π radianos.

Ângulos notáveis na circunferência trigonométrica

Figura 39 Circunferência trigonométrica

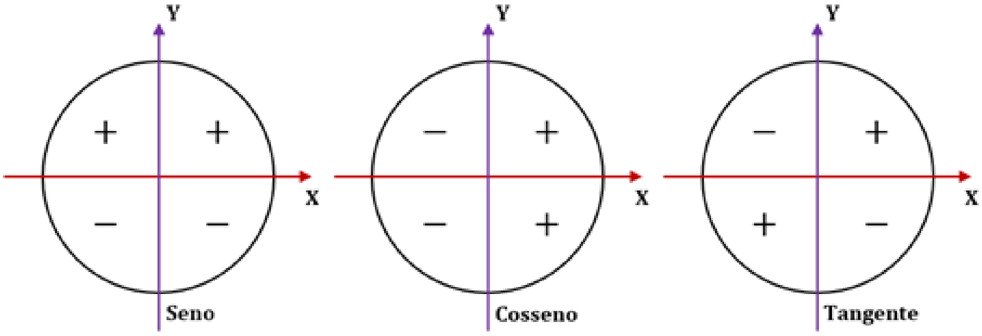


Fonte 15 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm

Variações dos sinais de Seno, Cosseno e Tangente

- **Cosseno:** como ele é o eixo horizontal, o cosseno de ângulos compreendidos à direita do eixo vertical é positivo, e o cosseno de ângulos compreendidos à esquerda do eixo vertical é negativo.
- **Seno:** basta lembrar que o eixo vertical é o eixo dos senos, então o seno de um ângulo que está acima do eixo horizontal é positivo; mas caso o ângulo esteja abaixo do eixo horizontal, o seno desse ângulo é negativo
- **Tangente:** Sabemos que a tangente é a razão entre o seno e o cosseno, então, para encontrar o sinal da tangente para cada um dos quadrantes, fazemos o jogo de sinal, o que faz com que a tangente seja positiva nos quadrantes ímpares e negativa nos quadrantes pares:

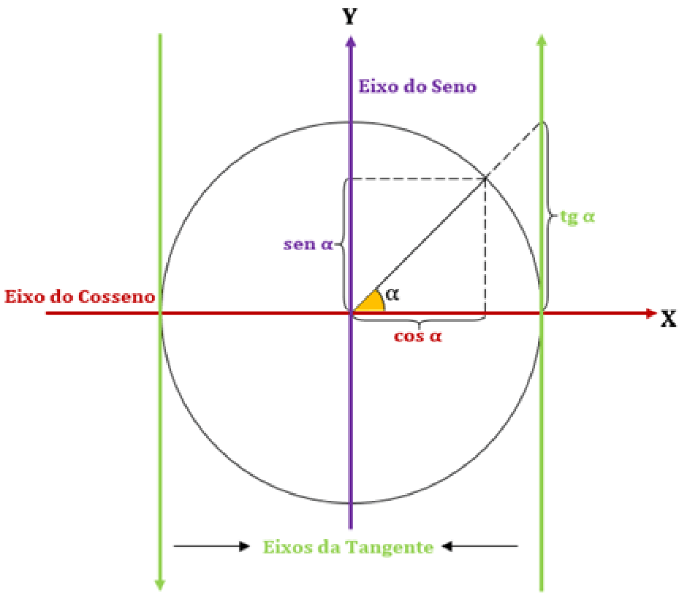
Figura 40 Variação dos sinais



Fonte 16 – Disponível em: https://aprovatotal.com.br/trigonometria-conceitos-e-principais-formulas/

Síntese

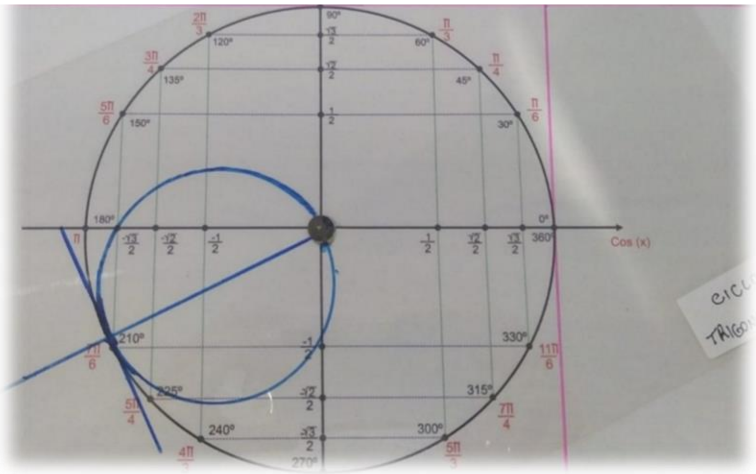
Figura 41 Ciclo Trigonométrico



Fonte 17 – Disponível em: https://aprovatotal.com.br/trigonometria-conceitos-e-principais-formulas/

2- Após a primeira explicação mostraremos aos alunos alguns objetos manipuláveis que representam o ciclo trigonométrico. Ensinaremos a como localizar os ângulos e radianos; ***(10 min)***

Figura 42 Ciclo Trigonométrico

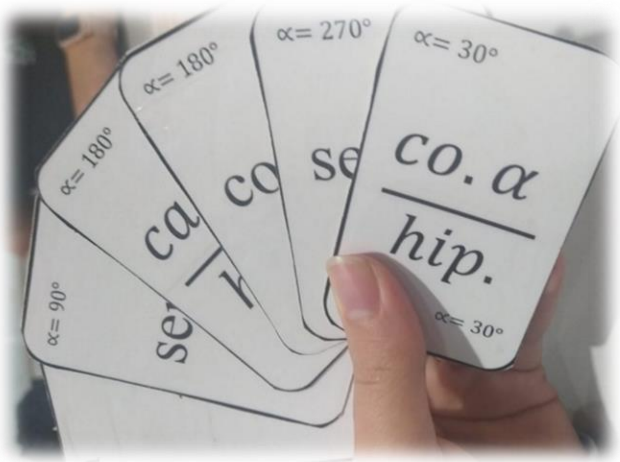


Fonte 18 - Acervo das autoras

3- Para fixar e assimilar as relações estabelecidas até aqui, iremos propor um jogo: “Pife Trigonométrico”, que consiste em me um jogo de cartas onde os alunos precisam montar trincas com cartas equivalentes; ***(30 min)***

Pife Trigonométrico

Figura 43 - Baralho Jogo Pife Trigonométrico



Fonte 19 - Acervo das autoras

<u>Regras do Jogo:</u>

Um baralho com 52 cartas

- 9 cartas para cada jogador;

- O jogador deve formar trincas com carta equivalente e naipes, que neste jogo são os ângulos, iguais;

- A cada rodada o jogador pesca uma carta, podendo ser do monte ou do descarte;

- A final de cada jogada o jogador deve descartar uma carta e passar a vez para o próximo jogador;

- O “bate”: para vencer o jogo é preciso formar 3 trincas. Para “bater” é possível pegar uma carta do lixo para montar a trinca que faltava, mesmo não sendo a vez deste jogador.

4- **Intervalo *(20 min)***
5- Após o intervalo deixaremos que os alunos joguem por mais alguns minutos; ***(20 min)***
6- Para o restante da aula será voltada para resolução da lista de exercícios juntamente com a correção.

Avaliação

A avalição será feita em todo momento da aula, os seguintes pontos são considerados: participação nas atividades e nas correções dos problemas, comunicação do aluno com os demais colegas e por fim a resolução dos exercícios propostos.

Referências

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar:**

PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual do Paraná** (CREP): Matemática. Curitiba: SEED, 2019.

PAIVA, Manoel. Matemática Volume Único. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2005.

Trigonometria: conceitos e principais fórmulas. Aprova Total. Disponível em: https://aprovatotal.com.br/trigonometria-conceitos-e-principais-formulas/ Acesso em: 27 de abril, 18 h.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues. Círculo Trigonométrico. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm Acesso em: 04 de maio, 15 h.

Anexo 1

7° Encontro

Conteúdo: Seno, Cosseno, Tangente no triângulo retângulo e ângulos notáveis

Data: 07/04/2023

1. Sabemos que a medida de 180° equivale a π radianos. Determine qual valor em radianos corresponde a 1° e qual valor em graus é correspondente ao valor de 1 radiano.

O valor de π equivale a 3,14159265...

Queremos a medida de 1° em radianos e de 1 radiano em graus;

$$180° = \pi\, rad;$$

Utilizando essas informações, podemos usar a regra de três para calcular os valores pedidos:

1 rad em graus:

$$\pi\, rad \;---\; 180°$$
$$1\, rad \;----\; x°$$
$$x.\pi = 180°$$
$$x = 180°/\pi$$
$$x = 57{,}29°$$

1° em radianos:

$$\pi\, rad \;---\; 180°$$
$$x\, rad \;----\; 1°$$
$$\pi = 180°.x$$
$$x = \pi/180°$$
$$x = 0{,}01745\, rad$$

2. Calcule as transformações de medidas de ângulos pedidas:

a) 120° em radianos;

$$\pi\, rad \;---\; 180°$$
$$x\, rad \;----\; 120°$$
$$180°\, x = 120°\pi$$
$$x = \frac{120\pi}{180}$$

$$x = \frac{2\pi}{3}\ rad$$

b) $\frac{2\pi}{7}$ em graus;

$$\pi\, rad\ ---\ 180°$$

$$\frac{2\pi}{7}\ rad\ ----x°$$

$$\frac{360\pi}{7} = \pi . x°$$

$$x° = 51{,}42$$

c) 234° em radianos;

$$\pi\, rad\ ---\ 180°$$

$$x\ rad\ ----234°$$

$$234\,.\pi = 180x$$

$$x = \frac{13}{10}\pi\, rad$$

d) $\frac{3\pi}{5}$ em graus.

$$\pi\, rad\ ---\ 180°$$

$$\frac{3\pi}{5}\ rad\ ----x°$$

$$\frac{540\,\pi}{5} = \pi . x$$

$$x = 108°$$

3. (Fuvest – SP) Quantos graus mede aproximadamente um ângulo de 0,105 radianos?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Sabemos que π rad equivale a 180°:

$$180° -----\ \pi\, rad$$

$$x -----\ 0{,}105\, rad$$

$$\pi . x = 180 . 0{,}105$$

Podemos utilizar que π ≈ 3,1415.

$$3{,}1415 . x = 18{,}9$$

$$x = 6{,}02°$$

Portanto, um ângulo que mede 0,105 radianos equivale a, aproximadamente, 6,02°. A alternativa correta é a letra c.

4. Determine a medida, em radianos, equivalente a:

a) 240°

$$360 - - - - - 2\pi\, rad$$

$$240° - - - - - X$$

$$X = \frac{240.2\pi}{360} = \frac{4}{3}\pi\, rad$$

b) 315°

$$360 - - - - - - 2\,\pi\, rad$$

$$315° - - - - - - X$$

X = $315.2\,\pi\,/360$ = $\frac{7}{4}\pi$ rad

c) 210°

d)45°

5. Determine a medida, em graus, equivalente a:

a) $\frac{\pi}{2} rad$ b) $\frac{5\pi}{6} rad$ c) $\frac{3\pi}{4} rad$ d) $\frac{11\pi}{6}$

6. (Cesgranrio) Um mecanismo liga o velocímetro a uma das rotas dianteiras de um automóvel, de tal maneira, quando essa roda gira 72π rad, uma engrenagem que compõe o velocímetro gira 2π rad, uma engrenagem que compõe o velocímetro gira 2π rad. Quando a roda gira $\frac{18\pi}{5}$ rad, essa engrenagem gira:

a)15° b)12° c)34,4° d)18° e) 9°

$$\begin{cases} 72\pi rad & \rightarrow & 2\pi rad \\ \dfrac{18\pi rad}{5} & \rightarrow & x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{(2\pi rad)\left(\dfrac{18\pi rad}{5}\right)}{72\pi rad} = \left(\frac{36\pi rad}{5}\right)\frac{1}{72} = \frac{\pi rad}{10} \rightarrow \frac{180°}{10} = 18°$$

7. A medida de um arco trigonométrico AM é 30°. Obtenha todas as medidas x associadas ao ponto M, sob cada uma das condições:

a) $0° \leq x \leq 1.080$

b) b) $-720° < x \leq 0°$

a) 1ª volta: 50º a medida de graus do arco)

2ª volta: 50º+ 360º = 410º (a medida da 1ª volta+ uma volta completa)

3ª volta: 50º+ 2. 360º

$$50º + 720º = 770º$$

b) 1ª volta: 50º

2ª volta: 50º - 360º = 210º (porque a volta foi no sentido negativo: sentido horário)

3ª volta: 50º - 2. 360º 50º- 720º= 670º

a medida da 1ª volta (o arco de 50º) + 1 volta negativa (2ª volta) + 1 volta negativa (3ª volta) a medida da 1ª volta (o arco de 50º) + 1 volta (2ª volta) + 1 volta (3ª volta)

8. Determine a medida x do arco da primeira volta positiva (0≤ $x \leq 360°$)

a) $\frac{21\pi}{2} rad$

Podemos converter essa medida para graus multiplicando por $(180/\pi)$

$$x = 21\pi/2\ rad * (180/\pi) \approx 945°$$

Portanto, a medida do arco para a primeira opção é $x = 945°$.

b) $\frac{23\pi}{2} rad$

Podemos converter essa medida para graus multiplicando por $(180/\pi)$:

$$x = 23\pi/2\ rad * (180/\pi) \approx 1035°$$

Portanto, a medida do arco para a segunda opção é $x = 1035°$.

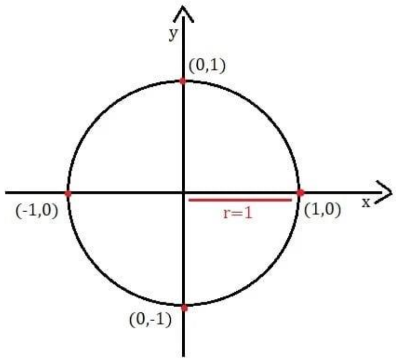
$c) -\frac{\pi}{4} rad$

Podemos converter essa medida para graus multiplicando por $(180/\pi)$:

$$x = -\pi/4\ rad * (180/\pi) \approx -45°$$

Portanto, a medida do arco para a terceira opção é $x = -45°$.

9. Observe a circunferência trigonométrica e calcule:



a) $Cos\ 0\ e\ Sen\ 0$

$$Cos\ 0 = 1\ e\ sen\ 0 = 0$$

b) $Cos\ \frac{3\pi}{2}\quad e\ Sen\ \frac{3\pi}{2}$

$$cos(3\pi/2)\ =\ 0\ sen(3\pi/2)\ =\ -1$$

c) $Cos\ \frac{\pi}{2}\quad e\ Sen\ \frac{\pi}{2}$

$$cos(\pi/2)\ =\ 0\ sen(\pi/2)\ =\ 1$$

d) $Cos\ \pi\ e\ Sen\ \pi$

$$cos(\pi)\ =\ -1\ sen(\pi)\ =\ 0$$

10. Calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{cos\ 0°\ .\ sen\ 270° +\ sen\ 90°\ .cos\ 180°}{sen^2 90° + cos^2 180°}$$

$$E\ =\ [1\ *\ (-1)\ +\ 1\ *\ (-1)]\ /\ [1\verb|^|2\ +\ (-1)\verb|^|2]$$

$$E\ =\ [-1\ -\ 1]\ /\ [1\ +\ 1]$$

$$E\ =\ -2\ /\ 2$$

$$E\ =\ -1$$

11. Calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{sen\ \frac{5\pi}{6} - cos\frac{4\pi}{3}}{sen^2\frac{7\pi}{4}}$$

$$E\ =\ (1/2\ -\ (-1/2))\ /\ (1/2)$$

$$E\ =\ (1/2\ +\ 1/2)\ /\ (1/2)$$

$$E\ =\ 1\ /\ (1/2)$$

$$E\ =\ 2$$

12. Se algum ângulo possui cosseno positivo e seno negativo ele está localizado no

a) 1º quadrante b) 2º quadrante c) 3º quadrante d) 4º quadrante

13. Usando a tabela dos arcos notáveis, calcular sen 150° e cos 150°.

$$sen(150°) = -1/2 \; cos(150°) = -\sqrt{3}/2$$

14. Usando a tabela dos arcos notáveis, calcular sen 240° e cos 240°

$$sen(240°) = -\sqrt{3}/2 \; cos(240°) = -1/2$$

10.2. Relatório Encontro 7

Relatório PROMAT

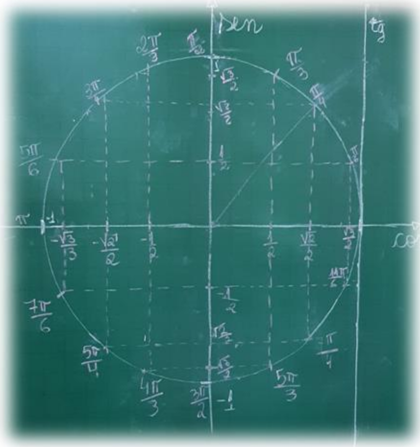
7° Encontro – 06/05/2023

No dia 06 de maio de 2023, às 8h, demos início ao sétimo encontro do PROMAT, com 13 alunos presentes. Nossos encontros ainda são sobre trigonometria, e para começar, definimos radianos e explicamos como calcular quanto mede um arco qualquer em radianos. Na sequência verificamos a medida da circunferência em radianos.

No segundo momento explicamos e mostramos exemplos de como transformamos graus em radianos e radianos em graus. Com a explicação, deixamos alguns minutos para que os alunos resolvessem alguns exercícios e solicitamos para que eles fossem resolver no quadro. De modo geral a participação dos alunos durante as aulas foi boa.

No terceiro momento expomos o ciclo trigonométrico, que os assustou, pelo fato de ter muitas informações. Mas, para melhor entendimento, desenhamos no quadro e explicamos passo a passo sobre os ângulos em grau e em radianos, e quais são os ângulos notáveis da circunferência trigonométrica.

Figura 44 - Ciclo Trigonométrico



Após o intervalo propomos um jogo, chamado pife trigonométrico, com o intuito de fixar e assimilar as relações estabelecidas até o momento.

Os alunos tiveram um pouco de dificuldade no começo, mas cada professora ficou em um grupo para auxiliar. O jogo era o seguinte:

Um baralho com 52 cartas

- 9 cartas para cada jogador;

- O jogador deve formar trincas com carta equivalente e naipes, que neste jogo são os ângulos, iguais;

- A cada rodada o jogador pesca uma carta, podendo ser do monte ou do descarte;

- Ao final de cada jogada o jogador deve descartar uma carta e passar a vez para o próximo jogador;

- O “bate”: para vencer o jogo é preciso formar 3 trincas. Para “bater” é possível pegar uma carta do lixo para montar a trinca que faltava, mesmo não sendo a vez deste jogador.

Figura 45 - Alunos jogando

Por fim os alunos foram orientados a resolver a lista de exercício em casa e trazer suas dúvidas para a próxima aula.

11. Encontro 8

11.1. Plano de Aula Encontro 8

Plano de Aula 8
13/05/2023

Conteúdo

Simetrias no círculo trigonométrico, redução ao primeiro quadrante, transformações trigonométricas, arco duplo e relação fundamental da trigonometria.

Público-alvo

Alunos inscritos no projeto de ensino Promat.

Objetivo geral

Compreender as simetrias dos ângulos correspondentes no círculo trigonométrica. Determinar as reduções dos ângulos para o primeiro quadrante e reconhecer a relação fundamental da trigonometria e sua definição.

Objetivos específicos

Ao se trabalhar como reduções, transformações e relação fundamental da trigonometria espera-se que o aluno seja capaz de:??

Tempo de execução

3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos

Lâminas, quadro, giz, material impresso, projetor, dados.

Encaminhamento metodológico

1- Iniciaremos a aula questionando aos alunos sobre alguns conceitos sobre os ângulos maiores que 90° do círculo trigonométrico. Como eles fariam para calcular e resolver problemas que envolvessem ângulos maiores. A intensão é introduzir o conceito de simetria dentro do círculo trigonométrico através das reduções para o 1° quadrante e assim dando sequência para as definições de transformações trigonométricas e arcos duplos, intercalando com exemplos; ***(1h e 40 min)***

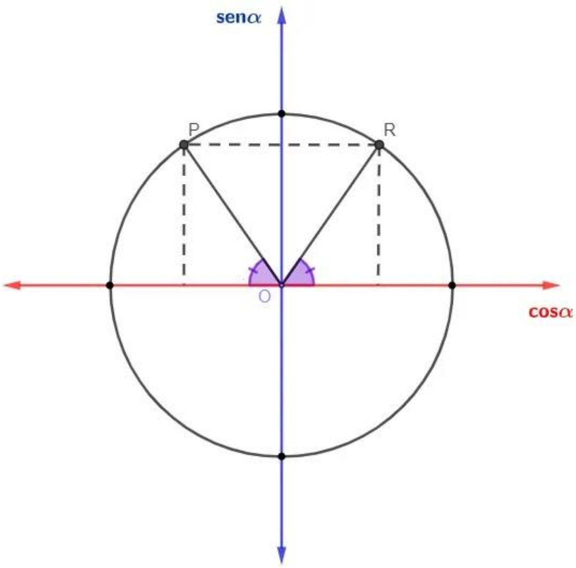
Simetria no Círculo Trigonométrico

É possível construir uma maneira de reduzir o seno, cosseno e tangente ao primeiro quadrante. Essa redução significa encontrar no primeiro quadrante um ângulo que seja simétrico a um ângulo dos demais quadrantes, pois, quando trabalhamos com um ângulo simétrico, o valor das razões trigonométricas é o mesmo, mudando apenas o seu sinal.

- **Redução do 2° para o 1° quadrante:**

Nota: A figura que segue está errada. O eixo x tem seta apenas para a direita e o eixo y apenas para cima. As setas servem para orientar os eixos.

Figura 46 Redução dos quadrantes



Fonte 20 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm

Como sabemos, no 1º e 2º quadrantes, o seno é positivo. Então, para calcular a redução do seno do 2º quadrante para o 1º quadrante, utilizamos a fórmula:

$$\boldsymbol{sen\ x = sen\ (180° - x)}$$

O cosseno e a tangente no 2º quadrante são negativos. Para fazer a redução do cosseno do 2º quadrante para o 1º quadrante, utilizamos a fórmula:

$$\boldsymbol{\cos x = -\cos(180° - x)}$$

$$\boldsymbol{tg\ x = -tg\ (180° - x)}$$

Exemplo:

1. Qual é o valor do seno e cosseno de um ângulo de 120º?

   O ângulo de 120° é um ângulo do segundo quadrante, pois está entre 90° e 180°. Para fazer a redução desse ângulo ao 1° quadrante calculamos:

   $$sen\ 120° = sen\ (180° - 120°)$$

   $$sen\ 120° = sen\ 60°$$

   O ângulo de 60° é um ângulo notável, logo o valor do seu seno é conhecido, então:

   $$\boldsymbol{sen\ 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Agora calculamos o seu cosseno:

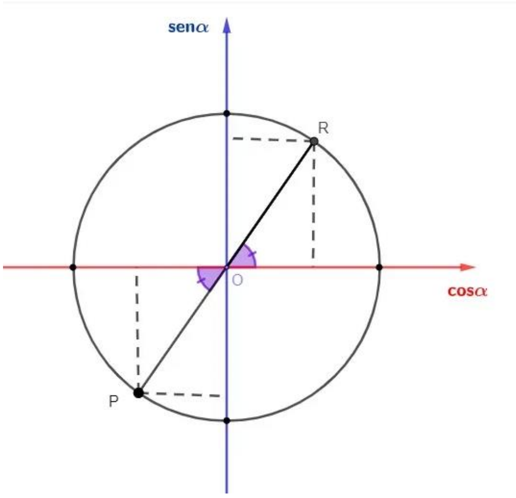
$$\cos 120° = -\cos(180 - 120)$$
$$\cos 120° = -\cos 60°$$

Como conhecemos o cosseno de 60°, temos que:

$$\mathbf{\cos 120° = -\frac{1}{2}}$$

- **Redução do 3° para o 1° quadrante:**

Figura 47 Redução para o 1° quadrante



Fonte 21 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm

O seno e o cosseno no terceiro quadrante são negativos. Então, para fazer a redução do seno e do cosseno do 3º quadrante para o 1º quadrante, utilizamos a fórmula:

$$\boldsymbol{sen\, x = -sen\,(x - 180°)}$$
$$\boldsymbol{\cos x = -\cos(x - 180°)}$$

A tangente no 3º quadrante é positiva. Para fazer a redução dela, utilizamos a fórmula:

$$\boldsymbol{tg\, x = tg\,(x - 180°)}$$

Exemplo:

2. Calcule o seno, o cosseno e a tangente de 225º.

$$sen\ 225° = -sen\ (225° - 180°)$$

$$sen\ 225° = -sen\ 45°$$

Como 45° é um ângulo notável, temos que:

$$\boldsymbol{sen\ 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Agora, calculando o cosseno, temos que:

$$\cos 225° = -\cos(225° - 180°)$$

$$\cos 225° = -\cos 45°$$

$$\boldsymbol{\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

E a tangente:

$$tg\ 225° = tg\ (225° - 180°)$$

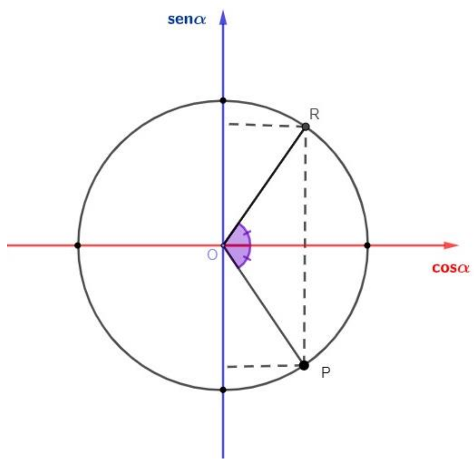
$$tg\ 225° = tg\ 45°$$

Sabemos que $tg\ 45° = 1$, então:

$$\boldsymbol{tg\ 225° = 1}$$

- **Redução do 4° para o 1° quadrante:**

Figura 48 Redução do 4° para o 1° quadrante



Fonte 22 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm

Os valores do seno e da tangente no 4º quadrante são negativos. Então, para fazer a redução do 4º para o 1º quadrante, utilizamos a fórmula:

$$\boldsymbol{sen\ x = -sen\ (360° - x)}$$

$$\boldsymbol{tg\ x = -tg\ (360° - x)}$$

Já o cosseno no 4º quadrante é positivo. Então, para reduzir ao 1º quadrante, a fórmula é:

$$\mathbf{\cos x = \cos(360° - x)}$$

Exemplo:

3. Calcule o valor do seno e do cosseno de 330º.

$$sen\ 330° = -sen\ (360° - 330°)$$

$$sen\ 330° = -sen\ 30°$$

$$\boldsymbol{sen\ 330° = -\frac{1}{2}}$$

Agora o cosseno:

$$\cos 330° = \cos(360° - 330°)$$

$$\cos 330° = \cos 30°$$

$$\boldsymbol{\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Transformações Trigonométricas

São as fórmulas que facilitam o cálculo do valor de seno, cosseno e tangente para a soma e a diferença entre arcos, a resolução de problemas envolvendo arco duplo.

- **Soma e diferença de dois arcos:**

Para calcular a soma ou a diferença entre dois arcos trigonométricos, utilizamos as fórmulas:

1) Seno da soma:

$$\boldsymbol{sen\ (a + b) = sen(a)\ .\cos(b) + sen(b).\cos(a)}$$

2) Seno da diferença:

$$\boldsymbol{sen\ (a - b) = sen(a).\cos(b) - sen(b).\cos(a)}$$

3) Cosseno da soma:

$$\boldsymbol{\cos(a + b) = \cos(a)\ .\cos(b) - sen(a)\ .\ sen(b)}$$

4) Cosseno da diferença:

$$\boldsymbol{\cos(a - b) = \cos(a)\ .\cos(b) + sen(a).\ sen(b)}$$

5) Tangente da soma:

$$\boldsymbol{tg\ (a+b) = \frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a).tg(b)}}$$

6) Tangente da diferença:

$$\boldsymbol{tg\ (a-b) = \frac{tg(a)-\ tg(b)}{1+\ tg(a).tg(b)}}$$

Exemplo:

4. Durante a medição de determinados ângulos, encontrou-se as medidas de 50º e 30º, e, calculado o valor do seno e do cosseno desses ângulos, temos:

   Use:

   sen 30º = 0,50 sen 50º = 0,77

   cos 30º = 0,87 cos 50º = 0,64

Com base nesses dados, calcule:

a) $sen\ 80°$

Sabemos que 80° = 30° + 50°, então, temos que:

$$sen\ (80°) = sen\ (30° + 50°)$$

$$sen\ (30° + 50°) = sen(30°).\cos(50°) + sen(50°).\cos(30°)$$

$$sen\ (80°) = 0{,}50\ .\ 0{,}64 + 0{,}77\ .\ 0{,}87$$

$$sen\ (80°) = \ 0{,}32 + 0{,}6699$$

$$\boldsymbol{sen\ (80°) = 0,9899}$$

b) $\cos 20°$

Sabemos que 20° = 50° - 30°, então, temos que:

$$\cos(20°) = \cos(50° - 30°)$$

$$\cos(50° - 30°) = \cos(50°)\ .\cos(30°) + sen\ (50°).sen\ (30°)$$

$$\cos(20°) = 0{,}64\ .\ 0{,}87 + 0{,}77\ .\ 0{,}50$$

$$\cos(20°) = 05568 + 0{,}385$$

$$\boldsymbol{\cos(20°) = 0,9418}$$

Arco Duplo

Encontramos as fórmulas para o arco duplo quando vamos realizar a soma de dois arcos iguais:

1) Seno do arco duplo:

$$\boldsymbol{sen\ (2\theta) = 2\ sen\ \theta\ .\cos\theta}$$

2) Cosseno do arco duplo:

$$\boldsymbol{\cos(2\theta) = \cos\theta^2 - sen\ \theta^2}$$

3) Tangente do arco duplo:

$$\boldsymbol{tg\ (2\theta) = \frac{2\ tg\ \theta}{1 - tg\ \theta^2}}$$

Exemplo:

5. Sabendo que tg 20º = 0,47, então, calcule o valor da tg 40º.

   Sabemos que 40° = 2 · 20°, então, utilizando a fórmula da tangente do arco duplo, temos que:

$$tg\ (2\,.\,20°) = \frac{2\ tg\ (20°)}{1 - tg\ (20°)^2}$$

$$tg\ (40°) = \frac{2\,.\,0{,}47}{1 -\ 0{,}47^2}$$

$$tg\ (40°) = \frac{0{,}94}{1 - 0{,}2209}$$

$$\boldsymbol{tg\ (40°) = 1{,}21}$$

2- Intervalo 20 min.;

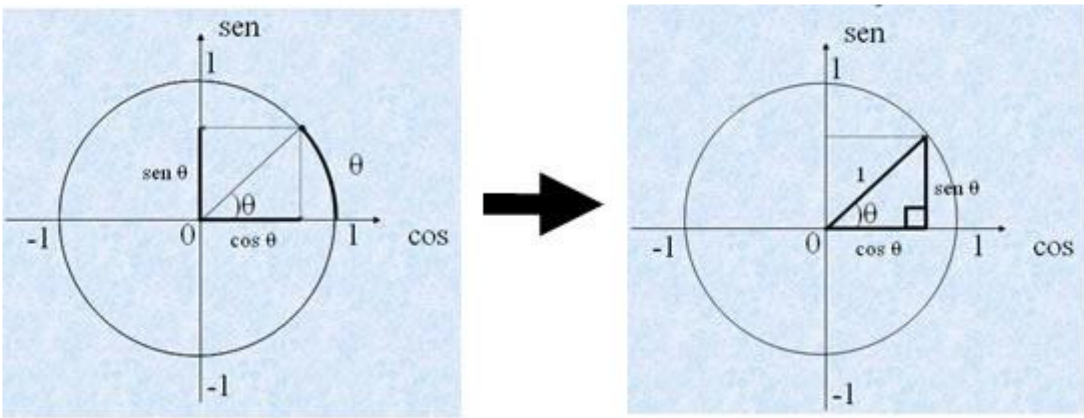
3- Após o intervalo explicaremos o último conceito da aula, a definição da relação fundamental da trigonometria e em seguida faremos alguns exemplos; ***(40 min)***

Relação Fundamental da Trigonometria

Para determinar a relação fundamental da trigonometria, precisaremos retomar as definições do Teorema de Pitágoras e do círculo trigonométrico.

Ao determinarmos um ponto qualquer sobre a extremidade do círculo, temos sua projeção no eixo dos senos e dos cossenos. Ao traçarmos um segmento de reta do eixo das origens do círculo até o ponto determinado, formamos um ângulo ϴ, como mostram os esquemas a seguir:

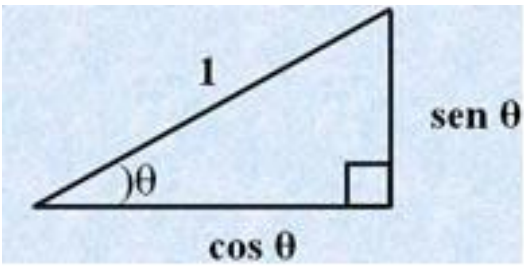
Figura 49 Relação fundamental



Fonte 23 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/relacao-fundamental-trigonometria.htm

Com base no triângulo retângulo formado, vamos aplicar os fundamentos do teorema de Pitágoras:

Figura 50 Relação fundamental



Fonte 24 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/relacao-fundamental-trigonometria.htm

Então temos que:

$$\boldsymbol{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$$

Exemplo:

6. Considerando que $sen\ x = \frac{1}{4}, com\ \pi < x < \frac{3\pi}{2}$ determine $\cos x$:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$cos^2x = 1 - \frac{1}{16}$$

$$cos^2x = \frac{15}{16}$$

$$\boldsymbol{\cos x = -\sqrt{\frac{15}{16}}}$$

7. Considerando que $sen\,x = \frac{1}{3}, com\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ determine $\text{sen}\,x$:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$sen^2\theta + \left(\frac{1}{3}\right)^2\theta = 1$$

$$sen^2x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$sen^2x = \frac{8}{9}$$

$$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{x} = \sqrt{\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{9}}}$$

4- Para finalizar a aula os alunos realizarão os exercícios da lista. Intercalaremos com correções e resoluções no quadro. ***(40 min)***

Avaliação

A avalição será feita em todo momento da aula e os seguintes pontos são considerados: participação nas atividades e nas correções dos problemas, comunicação do aluno com os demais colegas e por fim a resolução dos exercícios propostos.

Referências

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar:**

PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual do Paraná** (CREP): Matemática. Curitiba: SEED, 2019.

PAIVA, Manoel. Matemática Volume Único. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2005.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues. Círculo Trigonométrico. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm Acesso em: 04 de maio, 16 h.

GONÇALVES, Amanda. Redução ao primeiro quadrante no ciclo trigonométrico. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/reducao-ao-primeiro-quadrante-no-ciclo-trigonometrico.htm Acesso em: 04 de maio, 16 h.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues. Transformações Trigonométricas. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/transformacoes-trigonometricas.htm Acesso em: 04 maio, 16 h.

NOÉ, Marcos. Relação Fundamental da Trigonometria. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/relacao-fundamental-trigonometria.htm
Acesso em: 04 de maio, 18 h.

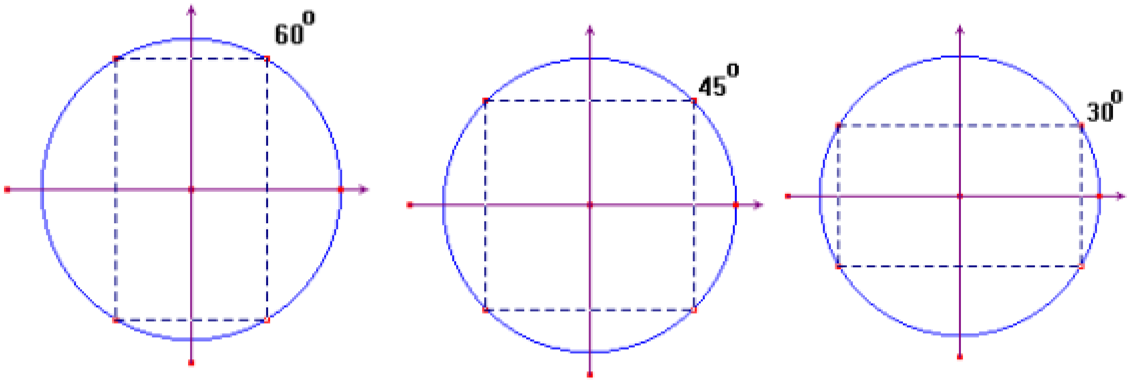
Anexo 1

8° Encontro

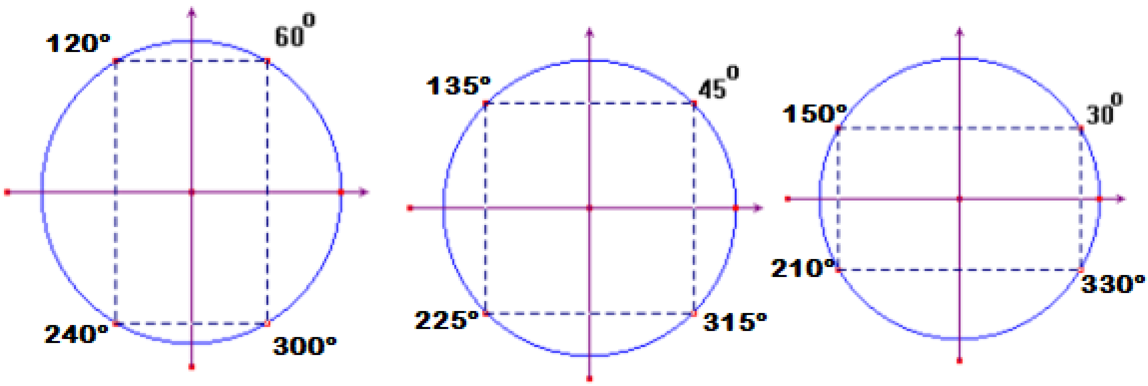
Conteúdo: Simetrias no círculo trigonométrico redução ao primeiro quadrante, transformações trigonométricas, arco duplo e relação fundamental da trigonometria.

Data: 13/05/2023

1) Complete, nas figuras, as medidas dos arcos trigonométricos correspondentes.



Resolução:



2) (UFRGS) Considere as afirmativas abaixo:

$I. tg\ 92° = -tg\ 88°$.

$II. tg\ 178° = tg\ 88°$.

$III. tg\ 268° = tg\ 88°$.

$IV. tg\ 272° = -tg\ 88°$.

Quais estão corretas?

a) Apenas I e III.

b) Apenas III e IV.

c) Apenas I, II e IV.

d) Apenas I, III e IV.

e) Apenas II, III e IV.

Resolução:

. $\boldsymbol{tan\ 92°\ = -tan\ 88°}$

Reduzindo o ângulo de 92° ao primeiro quadrante, temos:

180° – 92° = 88°

Os ângulos de 92° e 88° são correspondentes e possuem tangente de mesmo módulo. De acordo com a figura, podemos constatar que o sinal das duas tangentes é diferente. Logo, a afirmação I é verdadeira.

. $\boldsymbol{tan\ 178°\ =\ tan\ 88°}$

Reduzindo o ângulo de 178° ao primeiro quadrante, temos:

180° – 178° = 2°

Os ângulos de 178° e 88° não são correspondentes, logo suas tangentes são diferentes. Assim sendo, a afirmação II é falsa.

. $\boldsymbol{tan\ 268°\ =\ tan\ 88°}$

Reduzindo o ângulo de 268° ao primeiro quadrante, temos:

268° – 180° = 88°

Os ângulos de 268° e 88° são correspondentes e possuem tangente de mesmo módulo. Através da figura, vemos que é igual o sinal de suas tangentes. Logo, a afirmação III é verdadeira.

. $\boldsymbol{tan\ 272°\ = -tan\ 88°}$

Reduzindo o ângulo de 272° ao primeiro quadrante, temos:

360° – 272° = 88°

Os ângulos de 272° e 88° são correspondentes e suas tangentes possuem o mesmo módulo. Através da figura, vemos que é diferente o sinal de suas tangentes. Logo, a afirmação III é verdadeira.

São verdadeiras as afirmações I, III e IV. A alternativa correta é a letra d.

3) O valor de $(cos165° + sen155° + cos145° - sen25° + cos\ 35° + cos\ 15°)$ é:

a) $\sqrt{2}$.   b) –1.   c) 0.   d) 1.   e) $\frac{1}{2}$.

Resolução:

Primeiramente devemos reduzir os arcos:

$cos 165°$

$\cos x = -\cos(180° - x)$

$\cos 165° = -\cos(180° - 165°)$

$\cos 165° = -\cos(15°)$

$cos 145°$

$\cos x = -\cos(180° - x)$

$\cos 145° = -\cos(180° - 145°)$

$\cos 165° = -\cos(35°)$

$sen 155°$

$sen\ x = sen\ (180° - x)$

$sen\ 155° = sen\ (180° - 155°)$

$sen\ 155° = sen\ (25°)$

$-cos 15° + sen 25° - cos 35° - sen 25° + cos\ 35° + cos\ 15° = 0$

4) Calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes abaixo utilizando a redução dos respectivos arcos do 2 ◦ quadrante para o 1◦ quadrante.

$a)\ sen\ 150°$

$sen\ 150° = sen\ (180° - 150°)$

$sen\ 150° = sen\ (30°)$

Como conhecemos o $sen\ 30°$, temos

$sen\ 150° = \frac{1}{2}$

$b)\ cos\ 120°$

$\cos 120° = -\cos(180° - 120)$

$\cos 120° = -\cos(60)$

Como conhecemos o $cos\ 60°$, temos

$cos\ 120° = -\frac{1}{2}$

$c)\ \ cos\ 135°$

$\cos 135° = -\cos(180° - 135°)$

$\cos 135° = -\cos(45)$

Como conhecemos o $cos\ 45°$, temos

$cos\ 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$d)\ tg\ 150°$

$tg\ 150° = -tg\ (180° - 150°)$

$tg\ 150° = -tg\ (30°)$

Como conhecemos o $tc\ 30°$, temos

$tg\ 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$h)\ cos\ \dfrac{5\pi}{6}$

Sabemos que $\frac{5\pi}{6}$ corresponde ao arco de 150°, assim temos que

$\cos 150° = -\cos(180° - 150)$

$\cos 150° = \; -\cos(30)$

Como conhecemos o $cos\ 30°$, temos

$cos\ 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) Calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes abaixo utilizando a redução dos respectivos arcos do 3 ◦ quadrante para o 1◦ quadrante.

$a)\ sen\ 210°$

$sen\ 210° = -sen\ (210° - 180°)$

$sen\ 150° = -sen\ (30°)$

Como conhecemos o $sen\ 30°$, temos

$sen\ 150° = -\frac{1}{2}$

$b)\ sen\ 225°$

$sen\ 225° = -sen\ (225° - 180°)$

$sen\ 225° = -sen\ (45°)$

Como conhecemos o $sen\ 45°$, temos

$sen\ 150° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$c)\ cos\ 210°$

$\cos 210° = \; -\cos(210° - 180°)$

$\cos 210° = \; -\cos(30°)$

Como conhecemos o $cos\ 30°$, temos

$cos\ 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$d)\ cos\ 240°$

$\cos 240° = \; -\cos(240° - 180°)$

$\cos 240° = \; -\cos(60°)$

Como conhecemos o $cos\ 60°$, temos

$cos\ 210° = -\frac{1}{2}$

$e)\ tg\ 225°$

$tg\ 225° = tg\ (225° - 180°)$

$tg\ 225° = tg\ (45°)$

Como conhecemos o $tg\ 45°$, temos

$tg\ 45° = 1$

$f)\ tg\ 240°$

$tg\ 240° = tg\ (240° - 180°)$

$tg\ 240° = tg\ (60°)$

Como conhecemos o $tg\ 60°$, temos

$tg\ 60° = \sqrt{3}$

$g)\ cos\ \frac{5\pi}{4}$

Sabemos que $\frac{5\pi}{4}$ corresponde ao arco de 225°, assim temos que

$\cos 225° = \; -\cos(225° - 180°)$

$\cos 225° = \; -\cos(45°)$

Como conhecemos o $cos\ 45°$, temos

$cos\ 210° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

6) Calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes abaixo utilizando a redução dos respectivos arcos do 4 ◦ quadrante para o 1◦ quadrante.

$a)\ sen\ 330°$

$sen\ 330° = \ -sen\ (360° - 330°)$

$sen\ 330° = \ -sen\ (30°)$

Como conhecemos o $sen\ 30°$, temos $sen\ 330° = -\frac{1}{2}$

$b)\ cos\ 315\ \circ$

$\cos 315° = \cos(360° - 315°)$

$\cos 315° = \cos(45°)$

Como conhecemos o $\cos 45\,°$, temos $\cos 315\,° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$c)\ tg\ 330\ \circ$

$tg\ 330° = -tg\ (360° - 330°)$

$tg\ 330° = -tg\ (30°)$

Como conhecemos o $tg\ 30°$, temos $tg\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$d)\ sen\ \frac{5\pi}{3}$

Sabemos que $\frac{5\pi}{3}$ corresponde ao arco de 300°, assim temos que

$tg\ 300° = \ -tg\ (360° - 300°)$

$tg\ 300° = \ -tg\ (60°)$

Como conhecemos o $tg\ 60°$, temos $tg\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

7) Dado o ângulo de medida $a = \frac{\pi}{\mathbf{12}}$ radianos, obter:

a) sen(a)

Resolução: como $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{4}$ são arcos notáveis, tome $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, para usar a fórmula do seno da diferença de dois ângulos.

$$sen\ (a - b) = sen(a)\,.\cos(b) - sen(b).\cos(a)$$

$$sen\ \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\,.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$sen\ \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$sen\ \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$sen\ \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

b) cos(a)

Como $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{4}$ são arcos notáveis, tome $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, para usar a fórmula do cosseno da diferença de dois ângulos.

$$\cos(a - b) = \cos(a)\,.\cos(b) + sen(a).\ sen(b)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\,.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{3}\right).\ sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

c) tan(a)

Como $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{4}$ são arcos notáveis, tome $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, para usar a fórmula da tangente da diferença de dois ângulos.

$$tg\,(a-b) = \frac{tg(a) - tg(b)}{1 + tg(a).tg(b)}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\left(\frac{\pi}{3}\right) - tg(\frac{\pi}{4})}{1 + tg\left(\frac{\pi}{3}\right).tg(\frac{\pi}{4})}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}.1}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1 \cdot (1 - \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} \cdot (1 - \sqrt{3})}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1 - 3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 3}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{-2}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{3}$$

8) Dado o ângulo de medida $a = 105°$, obter:

105° corresponde a $\frac{7\pi}{12}$ radianos.

a) sen(a)

Resolução: Como $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{4}$ são arcos notáveis, tome $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, para usar a fórmula do seno da soma de dois ângulos.

$$sen\,(a+b) = sen(a)\,.\cos(b) + sen(b).\cos(a)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

b) cos(a)

Como $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{4}$ são arcos notáveis, tome $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, para usar a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\,.\cos(b) - sen(a).\ sen(b)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{3}\right).\ sen(\frac{\pi}{4})$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

c) tan(a)

Como $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{4}$ são arcos notáveis, tome $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, para usar a fórmula da tangente da soma de dois ângulos.

$$tg\ (a+b) = \frac{tg(a) + tg(b)}{1 - tg(a).tg(b)}$$

$$tg\ \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\left(\frac{\pi}{3}\right) + tg(\frac{\pi}{4})}{1 - tg\left(\frac{\pi}{3}\right).tg(\frac{\pi}{4})}$$

$$tg\ \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}.1}$$

$$tg\ \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+1\cdot(1+\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}$$

$$tg\ \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+1+3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3}$$

$$tg\ \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$tg\ \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = -2-\sqrt{3}$$

9) (UFAM) O cosseno do arco de medida 255° é igual a:

$\boldsymbol{a})\ \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{4}$

$\boldsymbol{b)} \dfrac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$

$\boldsymbol{c)} \dfrac{(-\sqrt{2} - \sqrt{6})}{4}$

$\boldsymbol{d)} \dfrac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4}$

$\boldsymbol{e)} \dfrac{(\sqrt{2} - \sqrt{6})}{4}$

Resolução:

O valor do cosseno de 255º é desconhecido por nós, mas pode ser obtido a partir da soma de arcos. *Uma das possibilidades* é desmembrar o ângulo de 255° na soma 180° + 75°. Os valores de seno e cosseno de 180° são conhecidos, entretanto, precisamos encontrá-los para o ângulo de 75°, o que pode ser feito a partir da soma dos arcos de 30° e 45°:

$\boldsymbol{cos\ (x + y) = cos\ x\ .\ cos\ y - sen\ x\ .\ sen\ y}$

$\boldsymbol{cos\ (30° + 45°) = cos\ 30°\ .\ cos\ 45° - sen\ 30°\ .\ sen\ 45°}$

$\boldsymbol{cos\ (75°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ .\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\ .\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

$\boldsymbol{cos\ (75°) = \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

$\boldsymbol{cos\ (75°) = \dfrac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}}$

Vamos agora encontrar o valor do cosseno de 255°:

$\boldsymbol{cos\ (x + y) = cos\ x\ .\ cos\ y - sen\ x\ .\ sen\ y}$

$\boldsymbol{cos\ (180° + 75°) = cos\ 180°\ .\ cos\ 75° - sen\ 180°\ .\ sen\ 75°}$

$\boldsymbol{cos\ (255°) = -1\ .\ \dfrac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} - 0\ .\ sen\ 75°}$

$\boldsymbol{cos\ (255°) = \dfrac{(\sqrt{2} - \sqrt{6})}{4}}$

Concluímos então que a alternativa correta é a letra e.

10) O Valor numérico da expressão E = $cos\ 10° \cdot \cos 50° - sen\ 10° \cdot sen\ 50°$ é igual a:

a) 1　　b) $\frac{1}{2}$　　c) 0　　d) -1　　e) $-\frac{1}{2}$

Resolução: podemos notar que a expressão E = $cos\ 10° \cdot \cos 50° - sen\ 10° \cdot sen\ 50°$ corresponde ao cosseno da soma $\cos(a+b) = \cos(a) . \cos(b) - sen(a) . sen(b)$, desta forma temos que:

$\cos(10° + 50°) = \cos(10°) . \cos(50°) - sen(10°) . sen(50°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Alternativa b.

11) (UNESP) Para todo x ∈ IR, a expressão $cos\ (\frac{\pi}{2} + x) - sen\ (\pi - x)$ é equivalente a:

a) cos x b) zero c) − sen x − cos x d) 2 sen x e) − 2 sen x

Resolução: primeiramente vamos utilizar as fórmulas do seno e cosseno da soma.

$$cos\ (\frac{\pi}{2} + x) - sen\ (\pi - x)$$

Temos que:

$$cos\ \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x - sen\frac{\pi}{2} \cdot sen\ x$$

$$cos\ \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0 \cdot \cos x - 1 \cdot sen\ x$$

$$cos\ \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -sen\ x$$

Ainda,

$$sen\ (\pi - x) = sen\ \pi \cos x - sen\ x \cdot \cos \pi$$

$$sen\ (\pi - x) = 0 \cdot \cos x + sen\ x$$

$$sen\ (\pi - x) = 0 \cdot \cos x + sen\ x$$

Assim temos que:

$cos\ (\frac{\pi}{2} + x) - sen\ (\pi - x)$

$= -sen\ x - sen\ x = -2\ sen\ x$

Alternativa e.

12) Sendo $sen\ x = \frac{3}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular:

a)$sen\ 2x$

b)$\cos 2x$

Resolução:

Temos que:

$sen^2 x + \cos^2 x = 1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$

$\frac{9}{25} + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25}$

$\cos^2 x = \frac{16}{25}$

$\therefore \cos x = \frac{4}{5}.$

a)

$sen\ 2x = 2 \cdot sen\ x \cdot \cos x$

$sen\ 2x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$

$sen\ 2x = \frac{24}{25}$

b)$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x$

$\cos 2x = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\cos 2x = \frac{16}{25} - \frac{9}{25}$

$\cos 2x = \frac{7}{25}$

11.2. Relatório Encontro 8

Relatório PROMAT

8° Encontro – 13/05/2023

No dia 13 de maio de 2023, às 8h, demos início ao oitavo encontro do PROMAT, com 18 alunos presentes. Neste encontro trabalhamos as simetrias no círculo trigonométrico, as reduções ao primeiro quadrante, as transformações trigonométricas, arco duplo e a relação fundamental da trigonometria.

Para trabalhar com as simetrias no círculo trigonométrico e as reduções do 2°, 3° e 4° quadrante, relembramos os arcos notáveis trabalhados nos encontros passados. Em seguida deixamos os alunos realizarem as atividades envolvendo as simetrias no quadrante, intercalando explicação e exemplos. Assim conseguimos verificar se os alunos estavam acompanhando e compreendendo o conteúdo. Enquanto isso a professora rodava pela sala auxiliando nas dúvidas. Por fim chamamos os alunos no quadro para resolverem os exemplos propostos.

Na sequência mostramos o seno da soma com o auxílio do círculo trigonométrico (Figura 1) juntamente com os alunos, com o objetivo de fazer com que eles visualizem essa relação.

Figura 51 Seno e Cosseno da soma e da diferença de dois arcos.

Fonte: Acervo das autoras (2023)

Após o intervalo apresentamos o seno, cosseno e tangente de arcos duplos, fazendo uma relação com soma de seno, cosseno e tangente de arcos diferentes. Em seguida fizemos, juntamente com os alunos, um exemplo para fixar essas relações.

A seguir mostramos a relação fundamental da trigonometria através do triangulo retângulo no círculo trigonométrico. Deixamos uns minutos para os alunos resolverem dois exercícios utilizando esta relação.

Deixamos o restante da aula para os alunos resolverem a lista, enquanto as professoras circulavam pela sala auxiliando nas questões.

12. Encontro 9

12.1. Plano de Aula Encontro 9

Plano de Aula 9

20/05/2023

Conteúdo

Trigonometria: Funções Trigonométricas Seno, Cosseno e Tangente.

Público-alvo

Alunos inscritos no projeto de ensino Promat.

Objetivo geral

Compreender os conceitos relacionados funções trigonométricas e resolver problemas que os envolvam operações entre funções.

Objetivos específicos

Ao se trabalhar com funções trigonométricas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar os valores que as funções Seno, Cosseno e Tangente assumem em cada um dos arcos notáveis, bem como analisar o sinal correspondente a cada arco de acordo com a analogia dos quadrantes;
- Conhecer e esboçar os gráficos das funções Seno, Cosseno e Tangente.

Tempo de execução

3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos

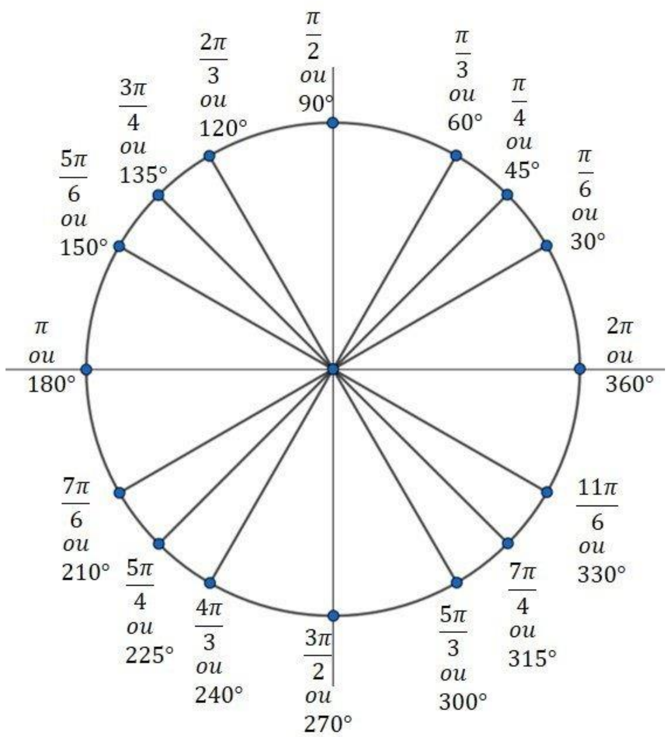
Lâminas, quadro, giz, material impresso, projetor, dados.

Encaminhamento metodológico

1. Iniciaremos a aula retomando os conceitos de seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico. Em seguida, apresentaremos as definições de função cosseno, seno e tangente intercalando com exemplos***; (90 min.)***

Vamos Relembrar o Círculo Trigonométrico?!

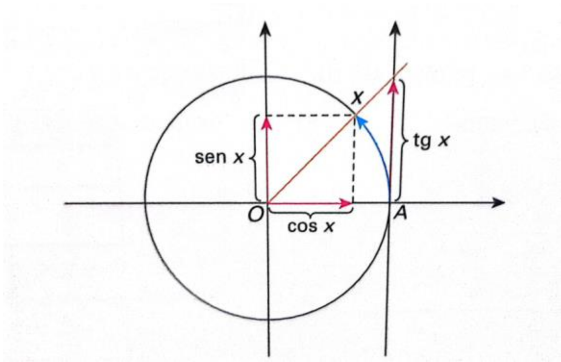
Figura 52 Círculo Trigonométrico



Fonte 25 - Disponível em: https://www.todamateria.com.br/funcoes-trigonometricas/

As funções trigonométricas mais usuais são a função seno, a função cosseno e a função tangente. O estudo delas está ligado ao ciclo trigonométrico.

Figura 53 - Círculo Trigonométrico



Fonte 26 - Acervo das autoras

Função Cosseno

A função cosseno é a função f: R → R, cuja lei de formação é f(x) = cos (x). Como o cosseno de um ângulo é sempre um número entre -1 e 1, então, -1 ≤ cos (x) ≤ 1.

- **Domínio**

O domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais, pois não existe nenhuma restrição para o valor de x, em que x é o ângulo em radianos. Para todo número real, é possível encontrar o valor de cos(x), então, Df = R.

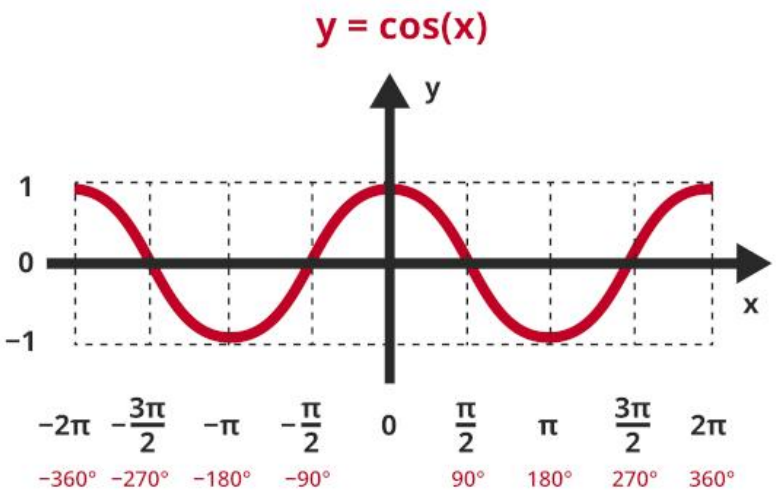
- **Imagem**

Sabemos que o contradomínio da função cosseno é o conjunto dos números reais, entretanto, quando analisamos a imagem da função, é possível perceber que ela é sempre um valor maior ou igual a -1 e menor ou igual a 1, pois o ciclo trigonométrico tem raio 1. Então, o maior valor que a função cosseno pode assumir é 1, e, analogamente, o menor valor que ela pode assumir é -1. Im = [-1, 1]

- **Gráfico**

O gráfico da função cosseno está contido entre as retas y = -1 e y = 1.

Figura 54 - Gráfico Cosseno

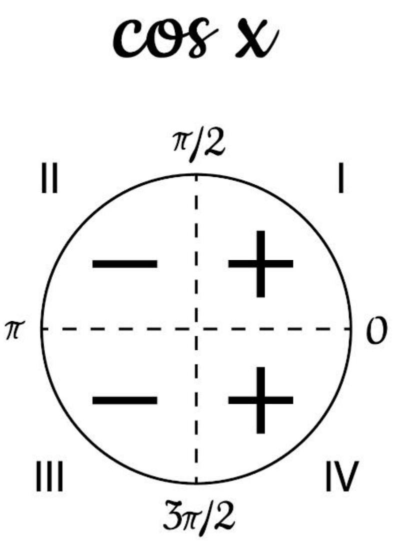


Fonte 27 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm

Fazendo a correspondência do valor do ângulo com o valor da razão trigonométrica, é possível perceber que o gráfico possui um comportamento cíclico, ou seja, o comportamento sempre se repete de forma periódica. O gráfico da função cosseno é conhecido como cossenoide.

- **Sinal**

Figura 55 - Sinal Função Cosseno



Fonte 28 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm

Sabemos que, no ciclo trigonométrico, o **cosseno possui valores positivos no I e IV quadrantes**. O primeiro quadrante está entre 0º e 90º, e o quarto quadrante está entre 270º e 360º. Em radianos, a função é positiva para valores de x entre 0 e π/2 e entre 3π/2 e 2π.

A função cosseno possui valores negativos no II e III quadrantes, ou seja, o ângulo está entre 90º e 270º. Em radianos, para que a função cosseno seja negativa, x está entre π/2 e 3π/2.

- **Período**

  O gráfico da função cosseno tem um período de 2π. Analisando, é possível perceber que ele é uma repetição da porção determinada pelos valores de x tais que 0 ≤ x ≤ 2π. Para valores anteriores ou posteriores a esse intervalo, se repete.

- **Arcos notáveis da função cosseno**

Figura 56 - Valores de Cosseno

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Fonte 29 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm

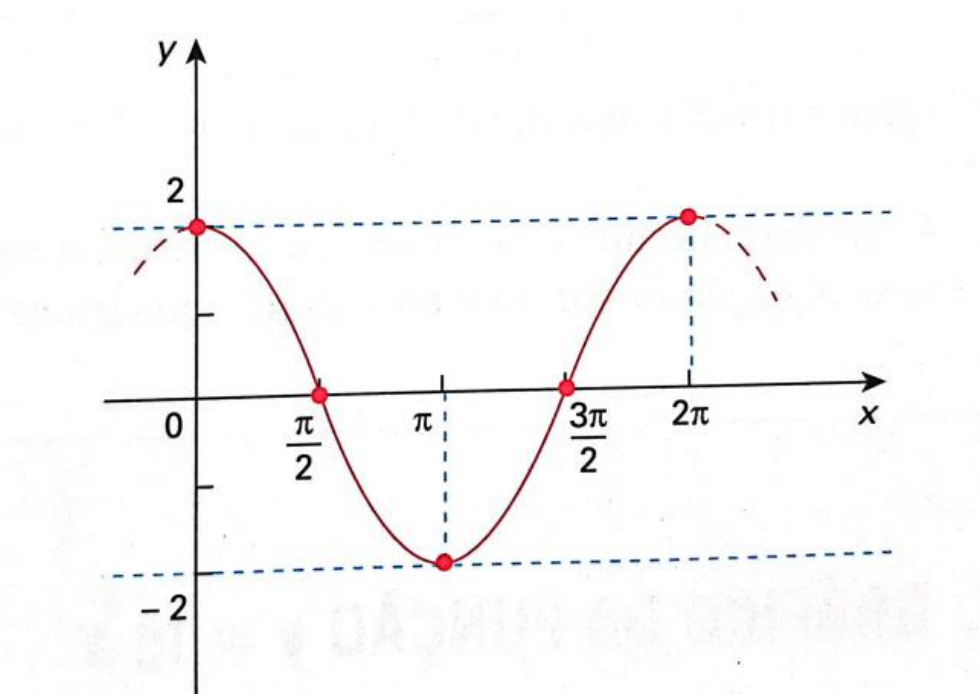
Exemplo 1

Esboce o gráfico da função $y = 2cosx$

X	Y
0	2

$\frac{\pi}{2}$	0
π	-2
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	2

Figura 57 - Gráfico Cosseno



Fonte 30 - Acervo das autoras

Função Seno

A função cosseno é a função f : R → R, cuja lei de formação é f(x) = sen (x). Como o seno de um ângulo, assim como o cosseno, **é sempre um número entre 1 e -1**, então, -1 ≤ sen (x) ≤ 1.

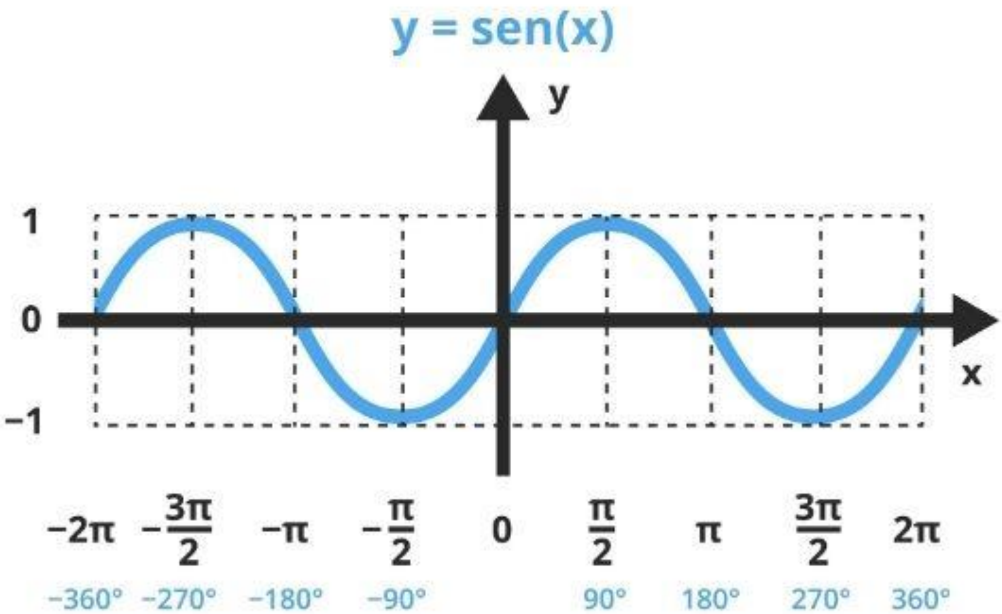
- **Domínio**
  O domínio da função seno é o conjunto dos números reais. A função f(x) = sen (x) está definida para todos os números reais, então, Df = R.
- **Imagem**

A imagem da função seno possui valor máximo em f(x) = 1 e valor mínimo quando f(x) = -1. Então, a imagem da função é o intervalo real [-1, 1].

- **Gráfico**

O gráfico da função seno é limitado também pelas retas horizontais y = -1 e y = 1. O comportamento é parecido com o da função seno periódico, tendo intervalos crescentes e intervalos decrescentes. Veja a representação gráfica da função seno no plano cartesiano a seguir:

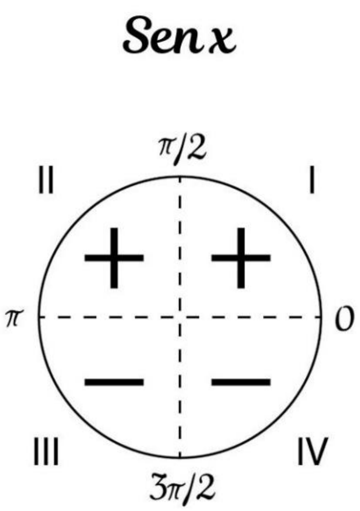
Figura 58 - Gráfico Seno



Fonte 31 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm

- **Sinal**

Figura 59 - Sinal Função Seno



Fonte 32 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm

Diferentemente da função cosseno, a função seno possui valores positivos nos quadrantes I e II, ou seja, para ângulos entre 0º e 180°. Em radianos, a função é positiva para valores entre 0 e π.

A função seno possui valores negativos no III e IV quadrantes, ou seja, o ângulo está entre 180º e 360º. Em radianos, para que a função seno seja negativa, x está entre π e 2π.

- **Período**

  O gráfico da função seno tem um período de 2π. Isso significa que, posteriormente ou anteriormente ao intervalo de 0 a 2π, o gráfico é periódico, ou seja, repete-se.

- **Arcos notáveis da função Seno**

Figura 60 - Valores Seno

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Fonte 33 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm

Exemplo 2

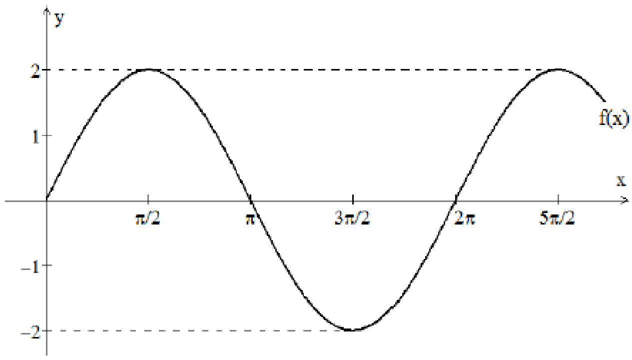
Esboce o gráfico da função $y = 2senx$

Para esboçar o gráfico basta atribuirmos ao arco x os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π e calculamos os valores respectivamente de y.

X	Y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	0

Gráfico da função seno

Figura 61 - Gráfico Seno



Fonte 34 - Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/questoes/a8187d0b-b6

Sabemos que cos x = sen $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; então o gráfico $y = cos\ x$ é gráfico da função y = sem $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Função Tangente

Sabemos que a tangente é a razão entre o seno e o cosseno. Diferentemente das duas funções trigonométricas anteriores, a função tangente não possui valor de máximo nem valor de mínimo. Além disso, existem restrições para o domínio, mas a lei de formação da função tangente é f(x) = tan(x).

- **Domínio**

  A função tangente possui restrições para o seu domínio, como ela é formada pela razão entre o seno e o cosseno, não existem valores para tangente quando cos(x) = 0. Pesando no ciclo trigonométrico de 0º a 360º, a função tangente não está definida para os ângulos de 90º e 270º, pois são os valores em que o cosseno é igual a 0. Quando há ângulos maiores que uma volta completa, todos aqueles em que o valor de cosseno é 0 não fazem parte do domínio da função cosseno.

$$D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

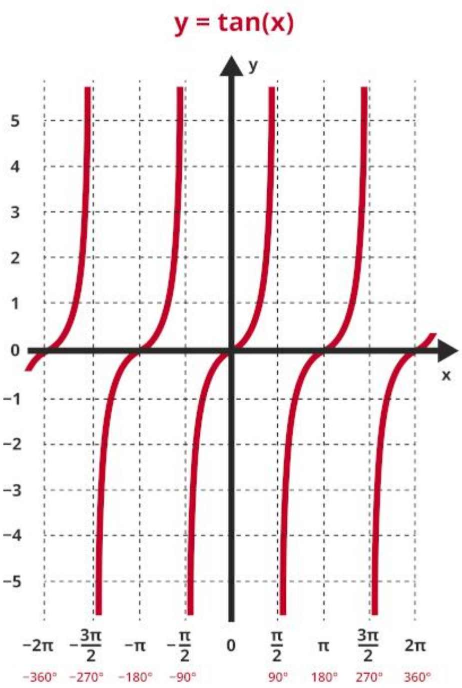
- **Imagem**

  Diferentemente da função seno e da função cosseno, a imagem da função tangente é o conjunto dos números reais, ou seja, ela não é limitada e não possui valor de máximo nem de mínimo. Im = R

- **Gráfico**

  A função tangente também é periódica como as funções seno e cosseno, ou seja, ela sempre se repete. Quando comparamos:

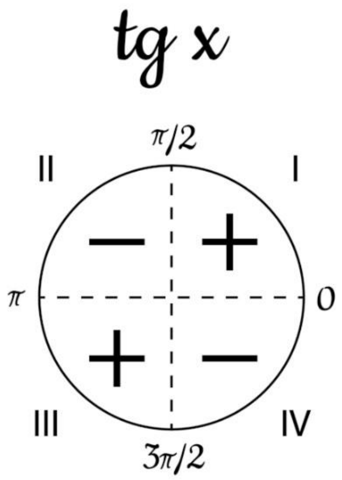
Figura 62 - Gráfico Tangente



Fonte 35 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm

- **Sinal**

Figura 63 - Sinal Função Tangente



Fonte 36 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm

A função tangente **possui valor positivo para os quadrantes ímpares, ou seja, I e III quadrantes**. Para ângulos entre 0º e 90º e ângulos entre 180º e 270º, a função possui valores positivos. Em radianos, o valor de x tem que estar entre 0 e π/2 ou π e 3π/2. Arcos notáveis na função tangente

- **Período**

  O período da função tangente também é diferente das funções seno e cosseno. O período da função tangente é π.

- **Arcos notáveis da função tangente**

Figura 64 - Valores Tangente

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
tan(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Fonte 37 - Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm

A cada número real x podemos associar um único $sen\ x$, um único $cos\ x$, e obedecida essa condição de existência uma única tangente $tg\ x$. Constatamos essas afirmações observando a circunferência trigonométrica.

Esses fatos permitem definir as seguintes funções:

- $f(x) = sen\ x$

Sendo o domínio $D(f)$ e a imagem $I(f)$ dados por: $D(f) = R$ e $Im = [-1{,}1]$

- $g\ (x) = cos\ x$

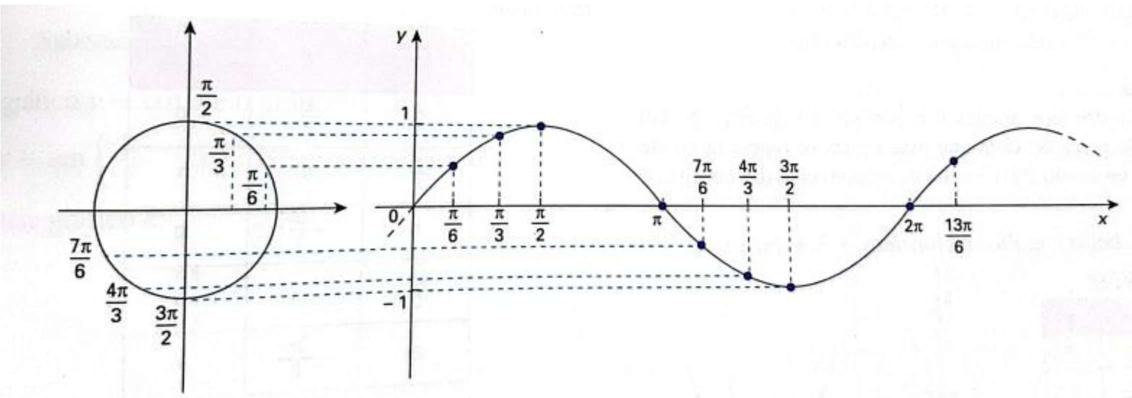
Sendo o domínio $D(g)$ e imagem $Im(f)$ dados por $D(g) = R$ e $Im(g) = [-1{,}1]$

- $H(x) = tg\ x$

Sendo o domínio $D(H)$ e imagem $Im(h)$ dados por: $D(h) = \{x \in x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, com\ k \in R$.

Em seguida mostraremos como se comporta o gráfico da função seno

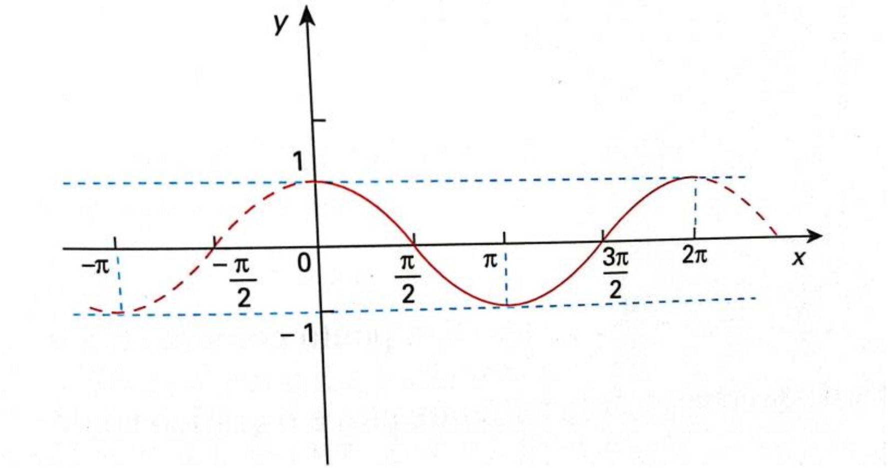
Figura 65 - Exemplo Função Trigonométrica



Fonte 38 - Acervo das autoras

Como podemos observar o gráfico é obtido repetindo-se infinitamente a parte correspondente aos valores de x do intervalo $[0{,}2\pi[$. Por causa dessas repetições dizemos que a função é periódica e seu período é 2π.

Figura 66 - Exemplo Função Trigonométrica



Fonte 39 - Acervo das autoras

2. Solicitaremos aos alunos para que iniciem a realização da lista de exercícios; ***(20 min.)***
3. **Intervalo (20min)**
4. Após o intervalo deixaremos que os alunos realizem os exercícios; **(40 min.)**
5. Para finalizar a aula faremos a correção dos exercícios no quadro. ***(40 min.)***

Avaliação

A avalição será feita em todo momento da aula, os seguintes pontos são considerados: participação nas atividades e nas correções dos problemas, comunicação do aluno com os demais colegas e por fim a resolução dos exercícios propostos.

Referências

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar:**

PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual do Paraná** (CREP): Matemática. Curitiba: SEED, 2019.

PAIVA, Manoel. Matemática Volume Único. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2005.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Funções Trigonométricas**. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm Acesso em: 18 de maio, 20 h.

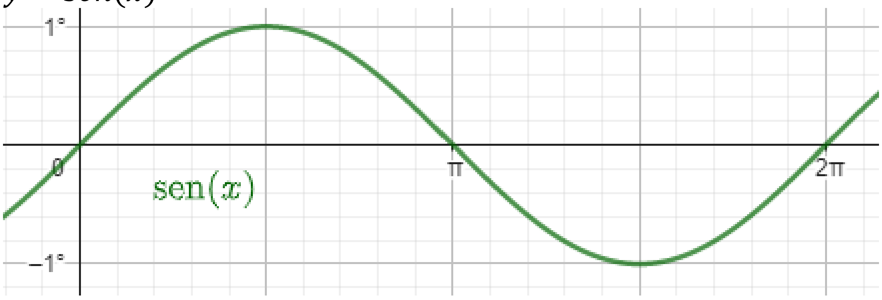
Anexo 1

9° Encontro

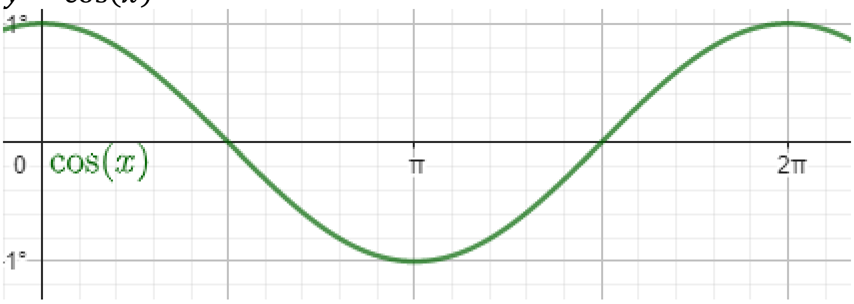
Conteúdo: Trigonometria: Funções Trigonométricas Seno, Cosseno e Tangente.
Data: 20/05/2023

1. Em cada item esboce o gráfico, indique a imagem, domínio e período para cada função:

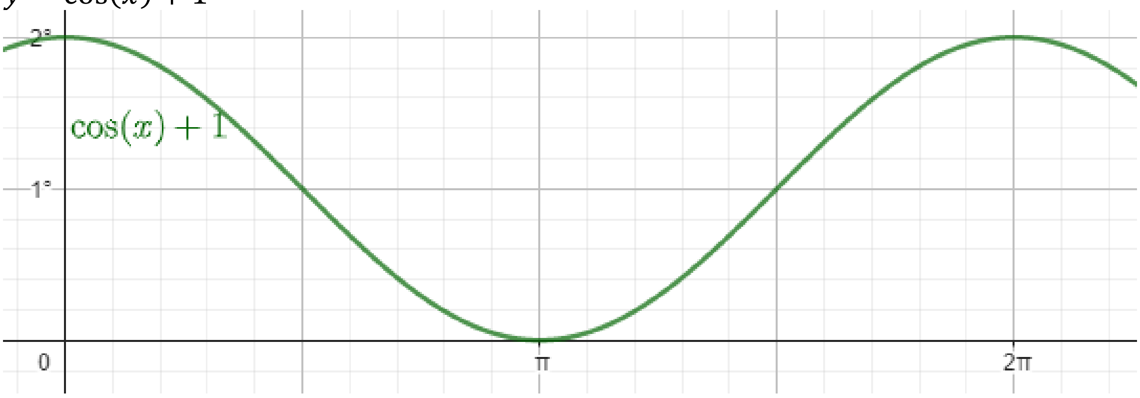
A) $y = sen(x)$



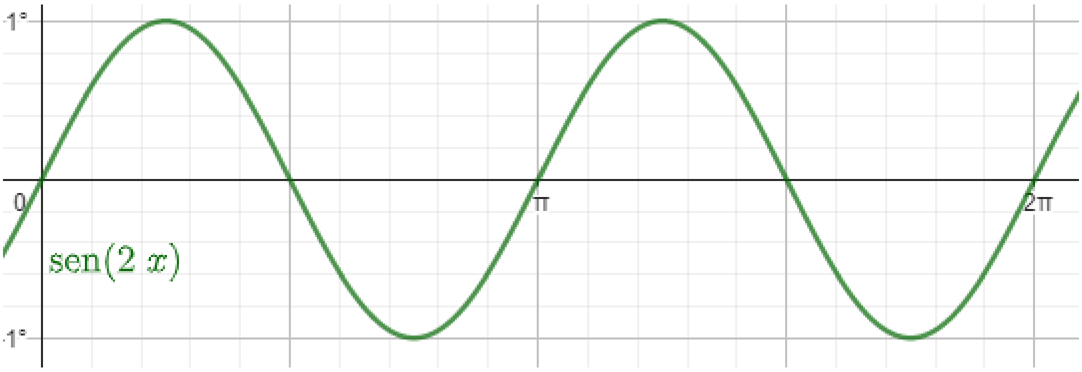
B) $y = \cos(x)$



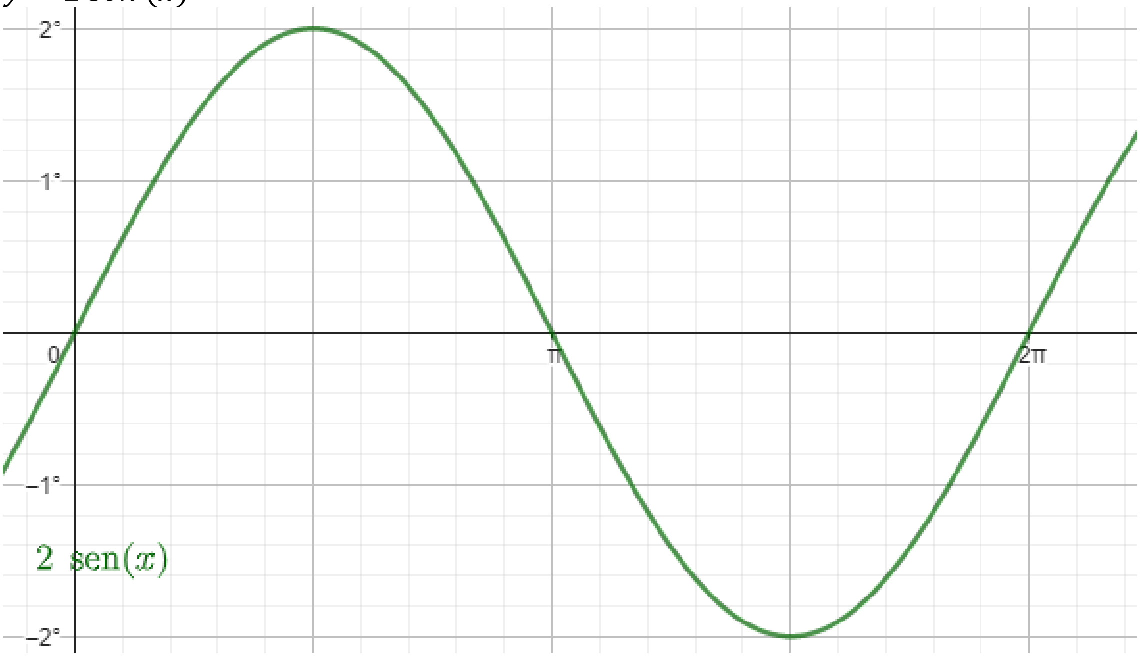
C) $y = \cos(x) + 1$



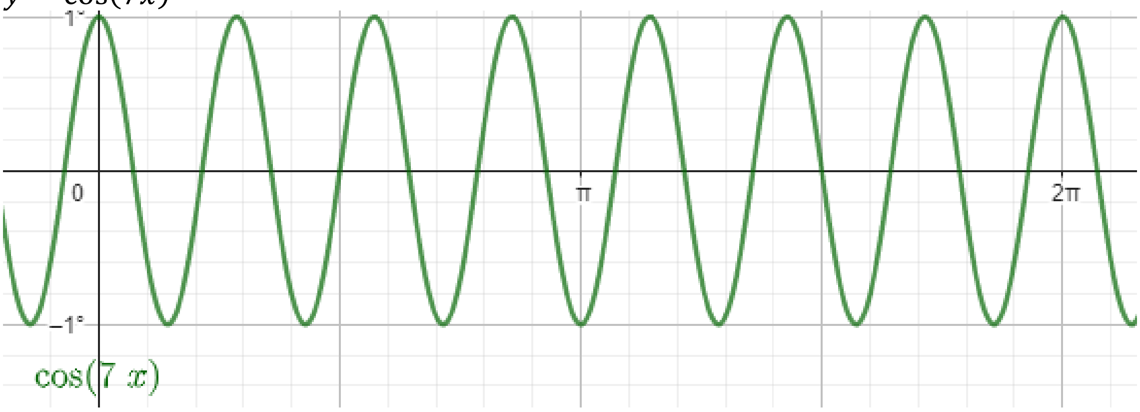
D) $y = sen(2x)$



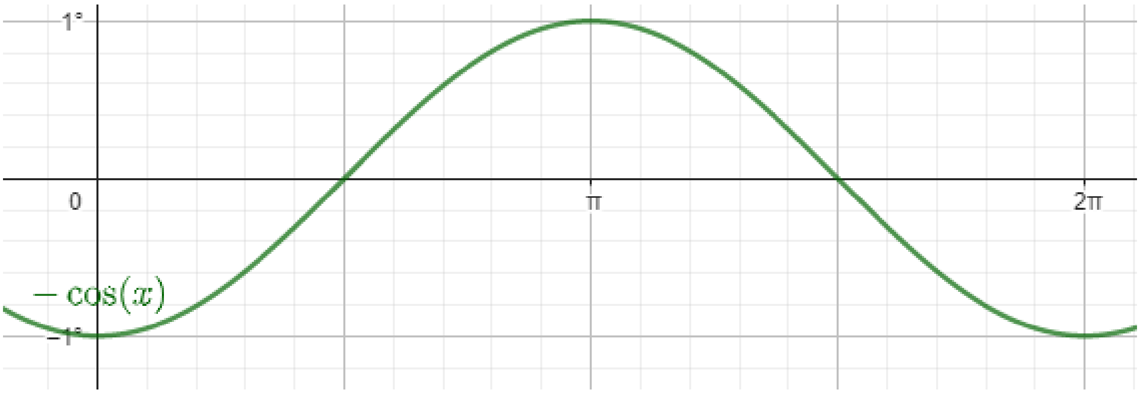
E) $y = 2\, sen\, (x)$



F) $y = \cos(7x)$



G) $y = -\cos(x)$



2. Dada a função f(x) = sen x + 3, o valor numérico da função para x = 3π/2 é:
A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 3.
E) 4.

$$f(x) = sen\ x + 3$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = sen\ \frac{3\pi}{2} + 3$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 + 3$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$$

3. Conhecendo a função f(x) = 4 cos (2x) + 1, podemos afirmar que a imagem da função é igual a:
A) [– 2, 2].
B) [– 3, 5].
C) [– 1, 1].
D) [– 4, 8].
E)] – ∞ , ∞[.

Alternativa B.

Sabemos que o maior valor de cosseno é 1 e o menor é -1, então:

Limite superior do intervalo:

Seja cos (2x) = 1:

f(x) = 4 · 1 +1

f(x) = 4 + 1

f(x) = 5

Limite inferior do intervalo:

$$\cos(2x) = -1:$$

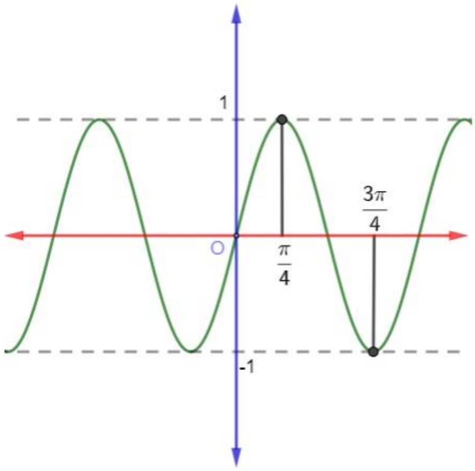
$$f(x) = 4 \cdot (-1) + 1$$

$$f(x) = -4 + 1$$

$$f(x) = -3$$

A imagem da função é o intervalo [– 3, 5].

4. Analise o gráfico da função trigonométrica a seguir:



A lei de formação que descreve a função demonstrada no gráfico é:
A) f(x) = sen (x).
B) f(x) = cos (x).
C) f(x) = sen (2x).
D) f(x) = cos (2x).
E) f(x) = 2tg(x).

Alternativa C.

Analisando o gráfico, sabemos que o seu comportamento é senoide, pois ele passa pelo ponto (0,0) e sen(0) = 0.

Note também que, quando x = π/4, f(x) = 1.

Seja f(x) = sen(ax), encontraremos o valor de a, lembrando que o ângulo cujo sen(x) = 1 é o ângulo π/2:

$$f(x) = sen(ax)$$

$$1 = sen(\frac{a\pi}{4})$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{4}$$

$$4\pi = 2a\pi$$

$$4 = 2a$$

$$\frac{4}{2} = a$$

$$a = 2$$

Então, a função é f(x) = sen(2x).

5. Dada a função f(x) = sen²(x) + 2cos(x), o valor numérico da função para x = π/4 é:
A) 0,5 + √2.
B) 1 + √2.
C) 4.
D) 4 – √2.
E) 0,5 + √3.

Alternativa A.

Substituindo o valor de x pelo valor dado, temos que:

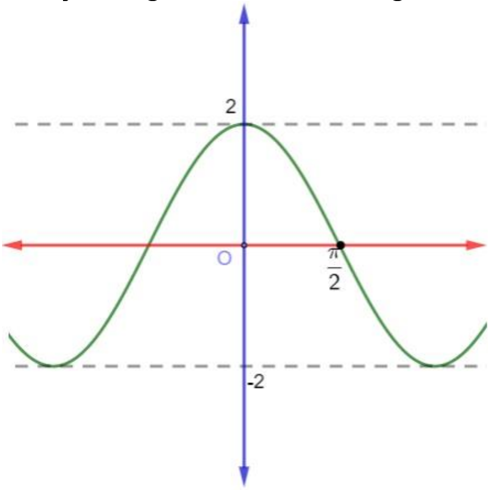
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{4} + \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,5 + \sqrt{2}$$

6. Analise o gráfico da função trigonométrica a seguir:



A lei de formação que descreve essa função é:
A) f(x) = sen (2x).
B) f(x) = cos (2x).
C) f(x) = 2sen (x).
D) f(x) = 2cos (x).
E) f(x) = 2tg(x).

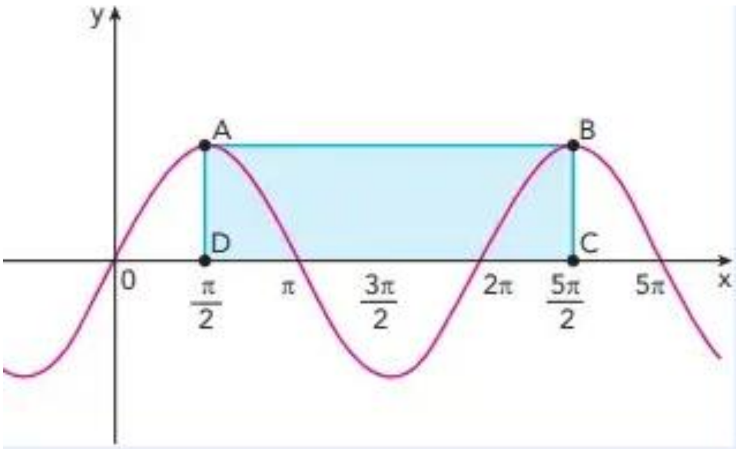
Alternativa D.

Note que o máximo e o mínimo da função são 2 e -2. Perceba que a função passa pelo ponto (0,2). Para que isso aconteça, essa função tem que ser uma função cosseno multiplicada por 2, pois, se fosse a função seno, o gráfico passaria pelo ponto (0,0).

Perceba, por fim, que π/2 é zero da função e sabemos que cos (π/2) = 0.

Então, a função é f(x) = 2cos(x).

7. (UERJ) O gráfico a seguir representa a função periódica definida por f(x) = 2sen(x), x ∈ R. No intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, A e B são pontos do gráfico nos quais $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\frac{5\pi}{2})$ são valores máximos dessa função.



A área do retângulo ABCD é:

A. 6π

B. 5π

C. 4π

D. 3π

A área do retângulo é base x altura, assim

Base → $\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$

Altura → $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

Área → Base . Altura = 4π

8. (UEFS - Adaptada) Se tg (x – y) + 2x = 5 – 2y e tg (y – x) + y = 7 – x, então o valor de x + y é

A. 5
B. 6
C. 7
D. 8
E. 4

Note que tg(x-y) = - tg(y-x), assim podemos fazer

$$tg(x-y) = 5 - 2y - 2x \quad e \quad tg(y-x) = 7 - x - y$$

Logo $5 - 2y - 2x = -(7 - x - y)$

$$5 - 2y - 2x = -7 + x + y$$
$$-3y - 3x = -12$$
$$-3(y + x) = -12$$
$$y + x = 4$$

9. (Uel) A expressão $\cos[\frac{3\pi}{2} + x]$ é equivalente a

A. -sen x
B. -cos x
C. sen x.cos x
D. cos x
E. sen x

Relembrando que cosseno da soma é $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - sen(a)sen(b)$, assim temos:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos(x) - sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)sen(x)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0.\cos(x) - (-1)sen(x)$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = sen(x)$$

10. (Enem 2015) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função

$$P(x) = 8 + 5cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$$

onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

A) janeiro.

B) abril.

C) junho.

D) julho.

E) outubro.

Alternativa D.

A safra tem seu valor máximo quando o preço é o mínimo possível. Para isso, o menor valor que o cosseno pode assumir é -1, então:

$$cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1$$

$$\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi$$

$$\pi x - \pi = 6\pi$$

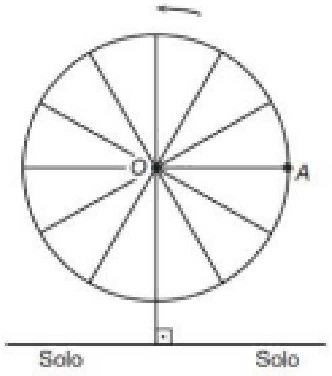
$$\pi x = 6\pi + \pi$$

$$\pi x = 7\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{\pi}$$

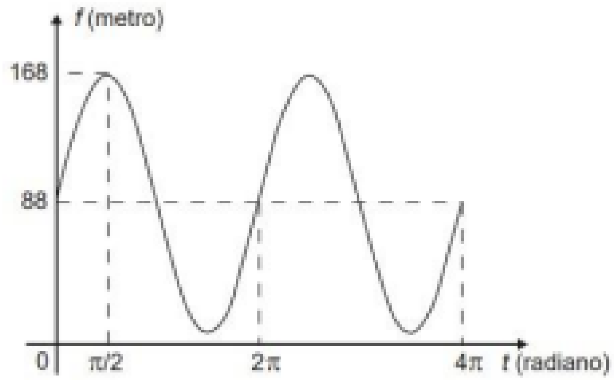
$$x = 7$$

11. (ENEM 2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t. Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por:

a) f(t) = 80 sen(t) + 88
b) f(t) = 80 cos(t) + 88
c) f(t) = 88 cos(t) + 168
d) f(t) = 168 sen(t) + 88 cos(t)
e) f(t) = 88 sen(t) + 168 cos(t)

Observe que no ponto inicial quando o Ângulo é zero temos a altura igual a 88 metros, assim ficamos com as seguintes opções:

$$168sen(t) + 88.\cos(t) = 88$$

Ou

$$80sen(t) + 88 = 88$$

Entretanto quando o ângulo é π, temos:

$$sen(\pi) = 0 \quad e \quad \cos(\pi) = -1$$

Note que quando temos o ângulo π, a altura é 88, assim analisando as funções teremos:

$$168\,.\,0 + 88.(-1) = -88$$

Ou

$$80\,.\,0\ + 88 = 88$$

Concluímos assim que a lei de formação é

$$f(t) = 80sen(t) + 88$$

12.2. Relatório Encontro 9

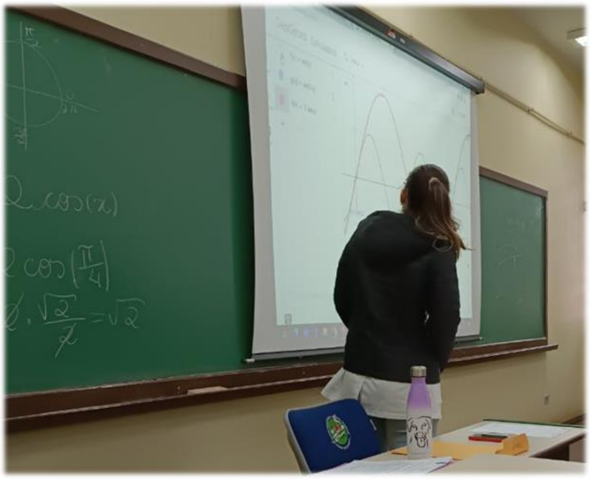
Relatório PROMAT

9° Encontro – 20/05/2023

No dia 20 de maio de 2023, às 8h, demos início ao nono encontro do PROMAT, com 15 alunos presentes. Neste encontro trabalhamos com Funções Trigonométricas Seno, Cosseno e Tangente. Iniciamos relembrando o círculo trigonométrico bem como os quadrantes e os valores em graus e radianos. Buscamos também relembrar o que é uma função para só então definirmos função trigonométrica. Abordamos o domínio e a imagem de uma função, e sua lei de formação. Definimos a função cosseno, abordamos o gráfico, domínio e imagem. Os alunos necessitavam que constantemente relembrássemos outros conteúdos para que compreendessem o assunto. Termos como imagem, contradomínio e domínio eram desconhecidos para alguns alunos.

Ainda sobre função cosseno, abordamos o período ressaltando sua utilidade no momento de construir o gráfico. Em seguida exploramos a tabela de arcos notáveis da função cosseno. Relembramos o sinal da função e ressaltamos a importância do período dela. Construímos o exemplo $2\cos(x)$, depois entregamos a lista e solicitamos que realizassem as letras *b, c, f, g da* primeira questão. Realizamos o mesmo para função seno, e em seguida solicitamos que concluíssem a primeira atividade da lista. Liberamos todos para o intervalo, e no retorno corrigimos as questões realizadas anteriormente, utilizamos o *GeoGebra para* melhor ilustrar os gráficos.

Figura 67 Função no Geogebra



Iniciamos a função tangente, mostramos sua lei de formação bem como seu domínio e imagem. Os alunos quase não interagiram durante a explicação, e um grupo se mostrou mais disperso durante a aula. Durante a explicação da função tangente, um aluno questionou novamente a respeito dos pontos nos quais a função não está definida. Ele confundiu o fato de não existir e o fato de ser zero. Buscamos respondê-lo e sanar suas dúvidas.

Na sequência solicitamos que se dedicassem em resolver os exercícios da lista. Caminhamos entre os grupos buscando auxiliá-los sempre que necessário. Depois de 40 min iniciamos a correção no quadro. Um grupo se mostrou disperso durante a correção continuando focado na resolução da lista e não acompanhando a conferência no quadro. A correção foi até o exercício 8 e os demais combinamos de encaminhar através do grupo.

13. Encontro 10

13.1. Plano de Aula Encontro 10

Plano de Aula 10
27/05/2023

Conteúdo

Tratamento da Informação: Estatística, gráficos e tabelas.

Público-alvo

Alunos inscritos no projeto de ensino Promat.

Objetivo geral

Preparar o aluno para questões do Enem e Vestibulares envolvendo os conceitos de Estatística, gráficos e tabelas.

Objetivos específicos

Ao se trabalhar com estatística, gráficos e tabelas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer diferentes tipos de gráficos;
- Compreender a definição da média, mediana e moda;
- Efetuar cálculos a partir de um banco de dados;
- Compreender as variações de gráficos e ter uma ideia de como construir.

Tempo de execução

3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos

Lâminas, quadro, giz, material impresso, projetor.

Encaminhamento metodológico

Iniciaremos a aula apresentando a definição de Estatística e algumas noções de como organizar e analisar uma tabela ou gráfico.

ESTATÍSTICA

A Estatística trata do conjunto de métodos utilizados para a obtenção de dados, sua organização em tabelas e gráficos e a análise desses dados.

Alguns exemplos são:

- Projeções sobre o número de habitantes em certo ano;
- Pesquisas para determinar a intenção de votos numa eleição;
- Calcular a taxa de desemprego em alguma capital do Brasil.

POPULAÇÃO ESTATÍSTICA

Quando é feita uma coleta de dados sobre determinado assunto, chama-se **população estatística** o conjunto formado por todos os elementos que possam oferecer dados pertinentes ao assunto em questão.

Exemplo:

1. O governo encomenda ao IBGE uma pesquisa para conhecer o salário médio dos brasileiros.
2. Um partido político quer conhecer a tendência do eleitorado quanto à preferência entre dois candidatos à presidência da República do Brasil.

AMOSTRA

Quando a população estatística é muito vasta ou quando não é possível coletar dados de todos os seus elementos, retira-se desse universo um subconjunto, chamado de **amostra**, e os dados são coletados nessa amostra.

DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA

A Frequência Absoluta ($\mathbf{F_i}$) do valor de x_i é o número de vezes que a variável estatística assume o valor de x_i. Enquanto na Frequência Absoluta Acumulada (**F. acum.**) os valores são obtidos adicionando a cada frequência absoluta os valores das frequências anteriores.

Veja o quadro abaixo que nos mostra as notas da prova de matemática dos alunos de uma certa turma:

Figura 68: Notas dos alunos de uma turma

Disciplina Matemática **Turma** 8ª A

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Nota	5,0	4,0	6,0	8,0	3,0	5,0	7,0	6,0	8,0	4,0	6,0	9,0	7,0	5,0	7,0	5,0	6,0	8,0	7,0	9,0	4,0	6,0	6,0	8,0	7,0

Fonte: (BONJORNO, 2002)

A Figura 2 nos mostra a frequência absoluta e a frequência absoluta acumulada dos dados da tabela acima:

Figura 69: Frequência absoluta e a frequência absoluta acumulada

x_i	F_i	F. acum.
0	0	0
1,0	0	0
2,0	0	0
3,0	1	1
4,0	3	1 + 3 = 4
5,0	4	4 + 4 = 8
6,0	6	8 + 6 = 14
7,0	5	14 + 5 = 19
8,0	4	19 + 4 = 23
9,0	2	23 + 2 = 25
10,0	0	25
		N = 25

Fonte: (BONJORNO, 2002)

PROBLEMA 1: Um dado foi jogado 20 vezes, sendo obtidos os seguintes pontos:

1, 5, 6, 5, 2, 2, 2, 4, 6, 5,

2, 3, 3, 1, 6, 6, 5, 5, 4, 2

Elabore um quadro com distribuição de frequências absolutas e frequências absolutas acumuladas.

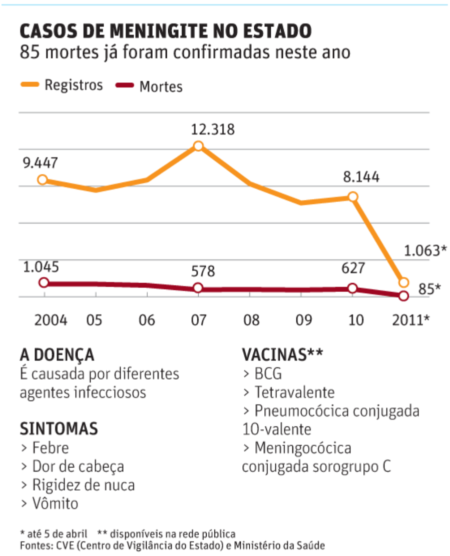
Xi	Fi	F. acum
1	2	2
2	5	7
3	2	9
4	2	11
5	5	16
6	4	20

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA

Na estatística encontramos diversos tipos de gráficos que nos auxiliam a visualizar os dados estatísticos e compreender seu comportamento. Destacamos os que mais encontramos em notícias e pesquisas. São eles os gráficos de linha, de barras verticais e horizontais, o gráfico de setores e o histograma.

Gráfico de linha

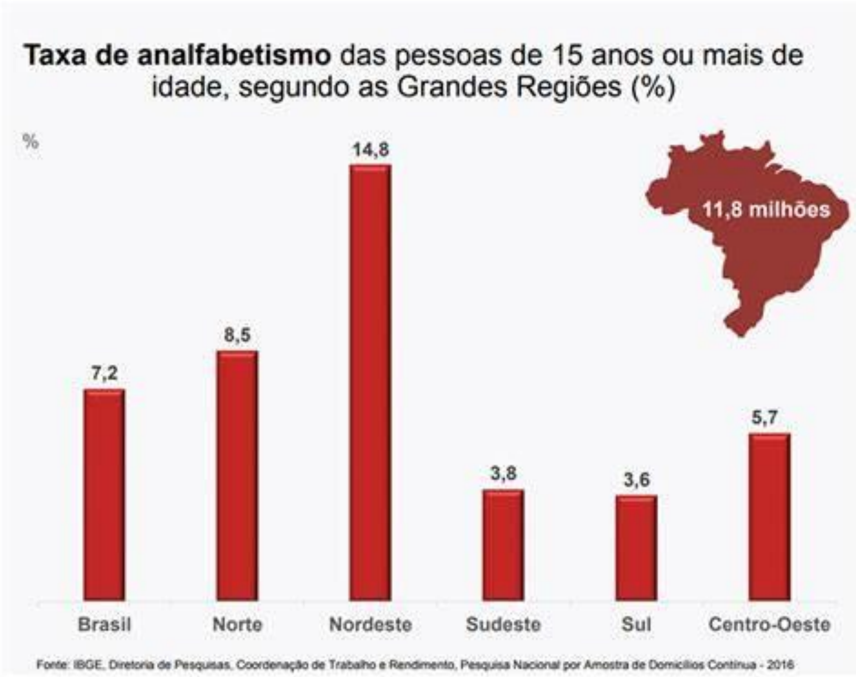
Figura 70: Gráfico de Linha



Fonte: https://www1.folha.uol.com.br/paywall/login.shtml?https://www1.folha.uol.com.br/cotidiano/2011/04/904071-casos-de-meningite-preocupam-cidades-do-interior-de-sao-paulo.shtml

Gráficos de barras verticais

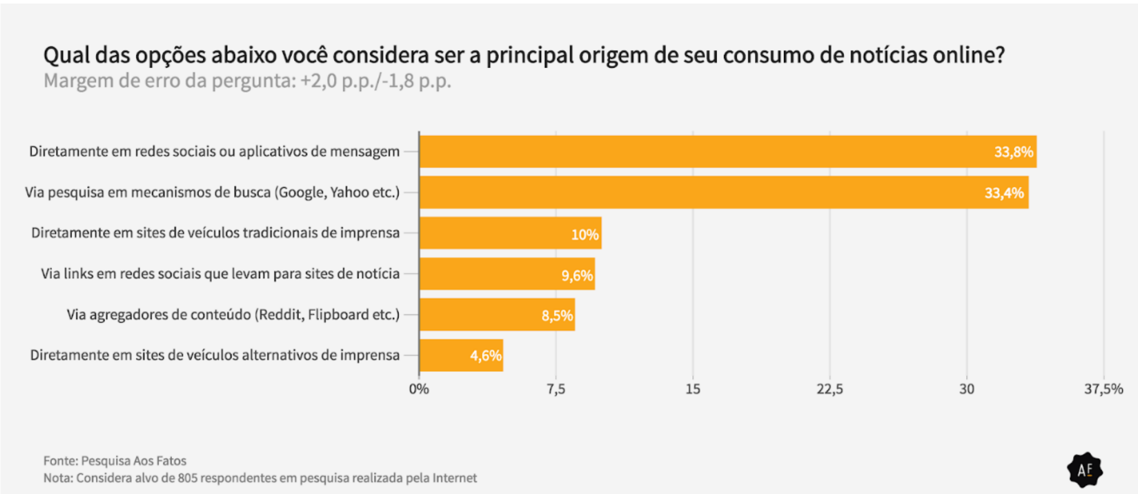
Figura 71: Gráfico de barras verticais



Fonte: https://rapaduranews.com.br/index.php?total=2017/12/taxa-de-analfabetismo-do-piaui-e.html

Gráficos de barras horizontais

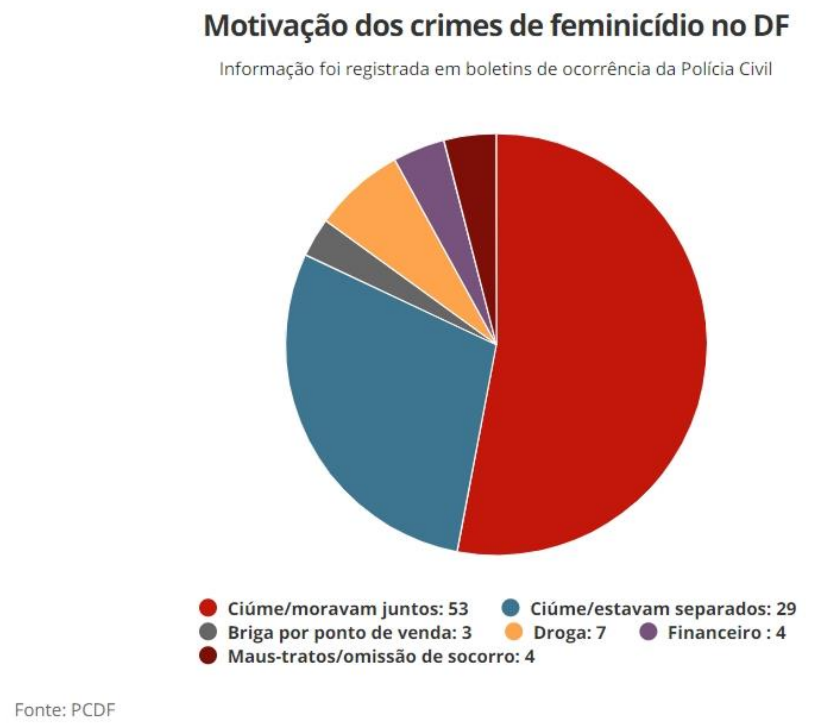
Figura 72: Gráfico de barras horizontais



Fonte: https://www.aosfatos.org/noticias/11-graficos-que-mostram-como-as-pessoas-consomem-noticia-na-internet/

Gráfico de setores

Figura 73: Gráfico de setores



Fonte: http://www.justicadesaia.com.br/feminicidio-entenda-como-funciona-investigacao-sobre-mortes-de-mulheres-no-df/

Histograma de frequência

Figura 74: Histograma

Fonte: https://brasildebate.com.br/por-dia-16-mulheres-morrem-por-agressao-fisica-no-brasil/

(35 min)

Em seguida deixaremos um tempo para os alunos resolverem o seguinte exemplo

Problema 2: (Enem 2020) Os gráficos representam a produção de peças em uma indústria e as horas trabalhadas dos funcionários no período de cinco dias. Em cada dia, o gerente de produção aplica uma metodologia diferente de trabalho. Seu objetivo é avaliar a metodologia mais eficiente para utilizá-la como modelo nos próximos períodos. Sabe-se que, neste caso, quanto maior for a razão entre o número de peças produzidas e o número de horas trabalhadas, maior será a eficiência da metodologia.

Em qual dia foi aplicada a metodologia mais eficiente?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Vamos calcular a razão entre o número de peças produzidas e o número de horas trabalhadas para cada dia.

Dia 1: $\frac{800}{4} = 200$

Dia 2: $\frac{1000}{8} = 125$

Dia 3: $\frac{1100}{5} = 220$

Dia 4: $\frac{1800}{9} = 200$

Dia 5: $\frac{1400}{10} = 140$

Assim concluímos que metodologia mais eficiente foi a do dia 3. Letra c).

(5min)

Após a correção do Problema 2, iremos trabalhar com as medidas estatísticas, classificadas em medidas de posição e medidas de dispersão.

MEDIDAS ESTATÍSTICAS

Para avaliar os dados estatísticos usamos alguns parâmetros, como as medidas estatísticas, classificadas como medidas de posição e medidas de dispersão.

Medidas de Posição

As medidas de posição mostram o posicionamento dos elementos de uma amostra de números quando esta é disposta em rol. Algumas dessas medidas são:

Média Aritmética ($\bar{x}$)

A média aritmética de um conjunto de números é obtida ao somar todos esses números e dividir esse resultado pela quantidade de números somados.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Moda

Em uma amostra cujas frequências dos elementos não são todas iguais, chama-se moda, e se indica por Mo, todo elemento de maior frequência possível.

Exemplo:

Na amostra 3, 4, 7, 3, 7, 9, 7 temos que a Mo é 7.

Mediana

Consideramos n números dispostos em rol: $x_1, x_2, ..., x_n$.

- Sendo n ímpar, chama-se mediana (**Md**) o termo central desse rol.
- Sendo n par, chama-se mediana (**Md**) a média aritmética entre os termos centrais desse rol.

Exemplos:

1. 145, 234, 356, 123, 97.

Rol: 97, 123, 145, 234, 356. Md = 145

2. 10, 24, 34, 67, 37, 12.

Rol: 10, 12, 24, 34, 37, 67.

$$Md = \frac{24+34}{2} = \frac{58}{2} = 29$$

Medidas de dispersão

As medidas de dispersão indicam o quanto os elementos de uma amostra estão afastados da média aritmética.

Variância (σ^2)

Chama-se variância a média aritmética entre os quadrados dos desvios dos elementos de uma amostra, isto é:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

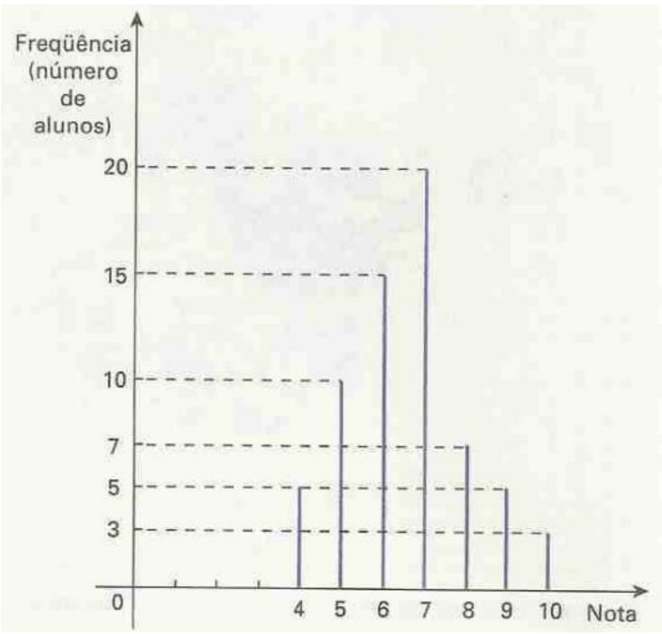
Desvio Padrão (σ)

É definido como a raiz quadrada da variância.

(30 min)

Para fixar os conhecimentos deixaremos dois problemas envolvendo as medidas estatísticas e em seguida corrigiremos juntamente com os alunos no quadro.

Problema 3: O gráfico ao lado mostra a distribuição de frequência das notas obtidas pelos alunos da 2ª série do ensino médio numa prova de Educação Física.



Determine:

a) A nota média desses alunos;

b) A mediana dessa distribuição;

c) A moda dessa distribuição.

Problema 4: (Enem 2010) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso, o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio-padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso:

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

A) Marco, pois a média e a mediana são iguais.

B) Marco, pois obteve o menor desvio-padrão.

C) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em português.

D) Paulo, pois obteve a maior mediana.

E) Paulo, pois obteve o maior desvio-padrão.

Alternativa B

Note que eles possuem a mesma média, então olharemos para o desvio-padrão. O candidato que possui menor desvio-padrão é o mais regular; no caso, Marco.

(15min)

Intervalo (35min)

Ao retornar do intervalo deixaremos os alunos colocarem em prática seus conhecimentos obtidos durante a aula com um jogo chamado 3Ms (Figura 8), criado pelo professor Dr. José Marcos Lopes da Universidade Estadual Paulista – UNESP.

Figura 75: Jogo 3Ms

MATERIAL

O jogo utiliza 36 cartas de um baralho comum numeradas de 2 a 10, com 4 cartas de cada número e uma folha de papel para anotações das jogadas. Para este jogo utilizamos apenas o número da carta e não o naipe.

Objetivo do jogo: obter o maior número de pontos após três rodadas do jogo. As pontuações serão obtidas em função dos maiores valores de uma das medidas de posição, dentre a Média, a Mediana ou a Moda. Em cada rodada um dos jogadores escolhe qual dessas medidas de posição será utilizada.

Regras do jogo:

(i) pode ser jogado por dois, três ou quatro jogadores. Cada partida consiste de três rodadas. Para cada rodada serão distribuídas no sentido anti-horário 5 (cinco) cartas para cada jogador. A partir dessas cartas cada jogador irá calcular a Média, a Mediana e a Moda referente aos números das cinco cartas. Os valores da Média, da Mediana e da Moda correspondem às pontuações do jogador naquela rodada;

(ii) a rodada se inicia com o primeiro jogador que recebeu as cartas. Em cada rodada o jogador tem a opção de comprar até duas cartas, uma de cada vez, do maço ou dentre aquelas já descartadas na mesa, porém terá que descartar uma carta para cada comprada;

(iii) depois de realizada a operação de compra de cartas, cada jogador retira uma carta do maço, aquele que retirou a maior carta escolhe a medida de posição para a pontuação daquela rodada. Caso ocorram empates a operação é repetida dentre aqueles que empataram até que se defina quem vai escolher a medida de posição;

(iv) para finalizar a rodada todos expõem as 5 cartas sobre a mesa com os valores calculados e anotados em uma folha de papel para as três medidas de posição: média, mediana e moda. Será desclassificado daquela rodada o jogador que calculou de maneira incorreta o valor de alguma das medidas de posição;

(v) após a realização de cada rodada os jogadores serão classificados em primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar. O jogador que obteve o maior valor para a medida de posição é classificado em primeiro lugar, o que obteve o segundo maior valor em segundo lugar e assim sucessivamente. O primeiro colocado recebe 3 pontos, o segundo 2 pontos, o terceiro 1 ponto e o quarto colocado não recebe pontuação. Caso ocorram empates cada jogador receberá a pontuação correspondente à sua classificação. Após a realização da terceira rodada, os pontos obtidos em cada rodada serão somados, e vence o jogo aquele jogador que obteve o maior valor.

Fonte: https://docplayer.com.br/26331337-O-ensino-dos-conceitos-de-media-mediana-e-moda-atraves-de-um-jogo-de-cartas.html

Avaliação

A avalição será feita em todo momento da aula, os seguintes pontos são considerados: participação nas atividades e nas correções dos problemas, comunicação do aluno com os demais colegas e por fim a resolução dos exercícios propostos.

Referências

PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual do Paraná** (CREP): Matemática. Curitiba: SEED, 2019.

PAIVA, Manoel. Matemática Volume Único. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2005.

ANEXO

Lista de exercícios:

1) (Enem 2019) O quadro apresenta a quantidade de um tipo de pão vendido em uma semana em uma padaria.

Dia da semana	Número de pães vendidos
Domingo	250
Segunda-feira	208
Terça-feira	215
Quarta-feira	251
Quinta-feira	187
Sexta-feira	187
Sábado	186

O dono da padaria decidiu que, na semana seguinte, a produção diária desse tipo de pão seria igual ao número de pães vendidos no dia da semana em que tal quantidade foi a mais próxima da média das quantidades vendidas na semana.

O dia da semana utilizado como referência para a quantidade de pães a serem produzidos diariamente foi

A) domingo. B) segunda-feira. C) terça-feira. D) quarta-feira. E) sábado.

Resolução:

Calculando a média, temos que:

$$\overline{x} = \frac{250 + 208 + 215 + 251 + 187 + 187 + 186}{7} = \frac{1484}{7} = 212$$

O valor mais próximo de 212 é encontrado na terça-feira, de 215 pães.

Alternativa C

2) (Enem 2019) Em uma fábrica de refrigerantes, é necessário que se faça periodicamente o controle no processo de engarrafamento para evitar que sejam envasadas garrafas fora da especificação do volume escrito no rótulo. Diariamente, durante 60 dias, foram anotadas as quantidades de garrafas fora dessas especificações. O resultado está apresentado no quadro.

Quantidade de garrafas fora das especificações por dia	Quantidade de dias
0	52
1	5
2	2
3	1

A média diária de garrafas fora das especificações no período considerado é
A) 0,1. B) 0,2. C) 1,5. D) 2,0. E) 3,0.
Resolução
Calculando a média, temos que:

$$\bar{x} = \frac{52.0 + 5.1 + 2.2 + 1.3}{60} = \frac{0 + 5 + 4 + 3}{60} = \frac{12}{60} = 0{,}2$$

3) (UFT-TO) A nota final para uma disciplina de uma instituição de ensino superior é a média ponderada das notas A, B e C, cujos pesos são 1, 2 e 3, respectivamente. Paulo obteve A = 3,0 e B = 6,0. Quanto ele deve obter em C para que sua nota final seja 6,0?
A) 7,0 B) 9,0 C) 8,0 D) 10,0

- Média = 1 * A + 2 * B + 3 * C / (1 + 2 + 3)

Substituindo, temos:

$$Média = 1 * A + 2 * B + 3 * C /(1 + 2 + 3)$$

$$6 = 1 * 3 + 2 * 6 + 3 * x / 6$$

$$6 = 3 + 12 + 3x / 6$$

$$6 * 6 = 15 + 3x$$

$$36 = 15 + 3x$$

$$3x = 36 - 15$$

$$3x = 21$$

$$x = 21 / 3$$

$$x = 7$$

Portanto, para que a média final seja 6, Paulo deve obter a nota C igual a 7

4) Na tabela a seguir está a média dos alunos nos 1º, 2º e 3º bimestres em Matemática.

Disciplina	1º bim.	2º bim.	3º bim.
Ana	6	5	5
Maria	8	4	6
Pedro	7	7	5

Suponha que a média da escola seja igual a 6 pontos. Se no 4º bimestre a nota de todos os estudantes for igual a 7, podemos afirmar que:
A) todos os alunos foram aprovados. B) somente Ana foi reprovada.

C) somente Maria foi reprovada. D) somente Pedro foi reprovado.
Resposta correta letra B.

5) A média ponderada dos números 5, 12, 20 e 15 com pesos respectivamente iguais a 1, 2, 3 e 4 é:
A) 6,0 B) 16,4 C) 17,2 D) 17,8 E) 18,0
Para calcular a média ponderada, é necessário multiplicar cada número pelo seu respectivo peso, somar esses produtos e dividir pelo somatório dos pesos.

No caso dos números 5, 12, 20 e 15, com pesos iguais a 1, 2, 3 e 4, respectivamente, a média ponderada pode ser calculada da seguinte forma:

$$(5 * 1 + 12 * 2 + 20 * 3 + 15 * 4) / (1 + 2 + 3 + 4)$$

Realizando as multiplicações e somando:

$$(5 + 24 + 60 + 60) / 10$$

$$(149) / 10$$

$$14{,}9$$

Portanto, a média ponderada é 14,9. Nenhuma das alternativas fornecidas corresponde a esse valor. Pode haver algum erro nos pesos ou nas alternativas fornecidas.

6) Em uma escola de Ensino Fundamental um concurso estabelece regras para conceder uma bolsa de estudos para o Ensino Médio. Em cada bimestre os alunos do 9.º ano realizam uma avaliação e, após os quatro bimestres, as notas são somadas. Os quatro alunos finalistas são os que alcançam as maiores pontuações. Ganhará a bolsa aquele que possuir a média mais alta das quatro notas das avaliações.

As notas dos quatro alunos finalistas são:

	1° Bimestre	2° Bimestre	3° Bimestre	4° Bimestre
Aluno A	75	86	83	91
Aluno B	78	98	67	99
AlunoC	83	84	89	87
Aluno D	98	65	87	77

O aluno que ganhou a bolsa de estudos foi
a) o aluno A. b) o aluno B. c) o aluno C. d) o aluno D.

7) (Enem - 2017) A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas (M)
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M \leq 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte.

Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação "Bom" ou "Excelente" conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro.

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é

a) 7,00. b) 7,38. c) 7,50. d) 8,25. e) 9,00.

8) (FGV) Sejam os números 7, 8, 3, 5, 9 e 5 seis números de uma lista de nove números inteiros. O maior valor possível para a mediana dos nove números da lista é

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Como se trata da mediana, organizaremos esses números em ordem crescente:

3	5	5	7	8	9

Mas o enunciado do exercício informou que na lista constam nove números, portanto, restam ainda três valores que não conhecemos. Todavia, como a mediana deve ser a maior possível, devemos considerar que esses números desconhecidos são **x, y** e **z** e que eles são maiores que nove. Agora basta acrescentar esses números à sequência:

3	5	5	7	**8**	9	x	y	z

Considerando os números desconhecidos maiores que nove, a mediana é dada pelo número central da sequência, ou seja, o número **8**. Portanto, a alternativa correta é a letra **d**.

9) Determine a média, moda e mediana do seguinte conjunto de dados: A = {2, 5, 1, 8, 12, 9, 10, 2}

A média é a soma dos valores e dividido pelo total deles:

Média $= (2 + 5 + 1 + 8 + 12 + 9 + 10 + 2) / 8 = 49 / 8 = 6{,}125$

A moda é o valor que aparece mais vezes:

Moda = 2

A mediana é o valor central do conjunto de dados:
Mediana = ~~1, 2, 2, 5, 8, 9, 10, 12~~ = (5 + 8)/2 = 6,5 Primeiro ordenamos os dados e depois pegamos os dois valores centrais, pois o total de elementos do conjunto é par e fizemos a média dos dois valores centrais.

13.2. Relatório Encontro 10

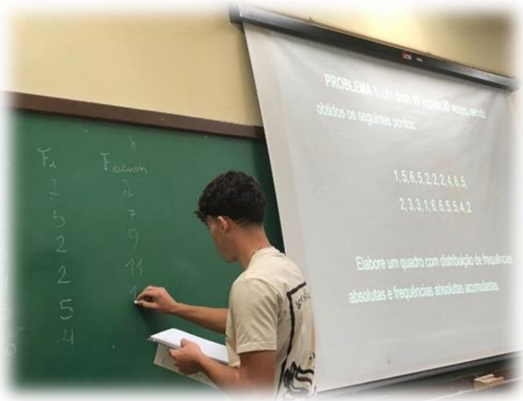
Relatório PROMAT

10° Encontro – 27/05/2023

No dia 27 de maio de 2023, iniciamos o último encontro do PROMAT. Para fazermos uso das mídias, tivemos alguns problemas técnicos que causou um pequeno atraso para darmos início à explicação.

Primeiramente apresentamos alguns conceitos disponibilizando alguns exemplos para intercalar com a explicação. Solicitamos aos alunos para resolverem os exemplos expostos e os chamamos em seguida para apresentar suas resoluções no quadro.

Figura 76 - Aluno apresentando resolução



Fonte 40 - Acervo das Autoras

Demos sequência com as explicações, resolvendo os próximos exemplos juntamente com os alunos. Após mais algumas explicações e exemplos, finalizamos a parte de definições e exemplos da aula.

Liberamos os alunos para o intervalo onde fizemos uma confraternização. No retorno, solicitamos aos alunos que se reunissem em grupos para realizarmos um jogo.

Figura 77 - Alunos jogando

Fonte 41 - Acervo das autoras

Após os alunos realizarem o jogo, fizemos a entrega da lista de exercícios e solicitamos para que eles a resolvessem. Para finalizar, realizamos a correção dos exercícios no quadro.

14. Considerações Finais

"Quem ensina aprende ao ensinar. E quem aprende ensina ao aprender."

Paulo Freire

O Estágio Supervisionado II é essencial para a formação docente e para a construção da identidade profissional. No PROMAT conseguimos relacionar a teoria e a prática com mais confiança, pois no decorrer desse período contamos com orientação de professores que atuam na área a anos.

Outro ponto positivo do PROMAT é seu público-alvo, constituído na maioria por alunos do Ensino Médio que tem a intensão de estudar para o Enem e Vestibulares. Como os alunos frequentam por vontade própria vemos uma maior participação e interação nos encontros, facilitando assim a aprendizagem.

No decorrer deste período nos reunimos, juntamente com os professores orientadores e colegas da turma, e discutíamos o que ocorreu nos encontros passados, o que funcionou e o que não funcionou, e implantávamos essas discussões no planejamento dos próximos encontros.

Nesse processo diversos conhecimentos foram compartilhados, entre eles ressaltamos a busca por metodologias atrativas para o aluno, com materiais e jogos diversificados. Nosso principal objetivo era a aquisição do conhecimento matemático de uma maneira mais lúdica, mostrando para os alunos que a aprendizagem não precisa ser apenas mecânica, decorando fórmulas sem compreender seu uso.

Nos encontros com os alunos conseguimos refletir sobre a prática docente, e entender que ser professor é mais do que apenas repassar o conhecimento. Para estabelecer uma boa relação com os alunos tivemos que praticar um olhar mais sensível durante nossas conversas, e assim entender as dificuldades dos alunos sobre o assunto a ser trabalhado e aproveitar suas facilidades ao aprender, como por exemplo, vimos que os alunos participavam e engajavam mais quando trazíamos o baralho para a sala de aula.

Concluímos assim, que esse espaço foi de extrema importância para nossa formação, aprofundamos em metodologias, jogos e ferramentas que trabalham o conhecimento de uma maneira mais lúdica, compartilhamos ideias e ensinamento sobre a sala de aula e por fim, (re)construímos nossa forma de ver e sentir a docência.